新物理学シリーズ 24

山内恭彦監修

ゲージ場の量子論 II

京都大学助教授 理学博士
九後 汰一郎 著

培風館

はしがき

1970年代初頭 G. 't Hooft が非可換ゲージ理論のくりこみ可能性を証明して以来，素粒子論は飛躍的な展開を遂げた。すなわち，一方で，弱い相互作用と電磁相互作用の統一理論として，Weinberg-Salam 理論が，中性カレントや W, Z ボソンの予言など，輝かしい成功を収めた。他方，漸近的自由性などの重要な発見を契機として，今日量子色力学 (QCD) と呼ばれるクォーク場の非可換ゲージ理論が素粒子世界の複雑多岐にわたる強い相互作用を正しく記述する理論として確立したのである。

これらの進展は，すべての相互作用を一つの幾何学として統一しようという Einstein の夢がもはや夢ではなく現実のものとして実現できる射程内に我々がすでに居るのだという認識を多くの物理学者にもたらした。なぜなら，今や自然界に存在する四つの相互作用——電磁相互作用，弱い相互作用，強い相互作用それに重力相互作用——はすべて**ゲージ場**によって媒介される普遍的・幾何学的な相互作用であることが明らかになったからである。前者三つの相互作用はコンパクト群の対称性 [Weinberg-Salam 模型は $SU(2)\times U(1)$，QCD は $SU(3)$] に基づく Yang-Mills ゲージ場によるものであり，最後の重力相互作用は非コンパクト群 [Poincaré 群] に基づくゲージ理論なのである。実際70年代の後半以来，まず，弱・電磁相互作用と強い相互作用とを一つのゲージ群 [$SU(5)$, $SO(10)$, E_6 など] に基づくゲージ理論として統一しようといういわゆる大統一理論の試みが現れ，続いて，4次元以上の時空での一般相対論として，4次元の重力も含めたすべてのゲージ相互作用を導こうとする Kaluza-Klein 流のアプローチも精力的に研究された。これらはさらに，超対称性 [ボソン-フェルミオン間の対称性] を採り入れた超重力理論，そして今日では，すべてのゲージ場および物質構成粒子をひもだと考える弦理論や超対称弦 (superstring) 理論，の試みへと受け継がれている。

本書は，このような飛躍的発展を遂げてほとんどその面目を一新した場の量子論，特にゲージ場の量子論を，できるだけわかりやすく解説しよう

というものである。骨子は筆者が修士課程1年生の物理学科の学生を対象に行ってきた講義のメモをもとにしているが，本書では，初等的なところも詳しく議論したので，理工系学部の学生で量子力学の初等的知識があれば，大学3，4年生でも十分理解できる内容になっていると思う。

本書の内容は，目次を見ていただけば，各節内の小項目名も載っているのでよくわかると思うが，少し説明を加えておこう。**1**〜**3**章は，相対論的場の量子論の基礎的事柄を扱った。**4**章は経路積分についてである。経路積分法は，数学的に厳密な定義を与えるのはなかなか難しいが，量子化の方法として直観的に大変見通しのよいもので，70年代のゲージ理論の発展にも重要な役割を果たした。ここの記述は標準的であるが，他書ではあいまいにされているような点も明確にしたつもりである。

5章は前半の中心をなす部分である。この章では，ゲージ場の量子論で特に重要な役割を果たすBRS不変性，それに基づくゲージ理論のLorentz共変な演算子型式を詳しく説明した。この演算子型式はゲージ理論の構造を大変明解にするものであるが，他書ではほとんど触れられていない。

6章では，今や場の理論にとって最も重要な概念の一つとなった対称性の自発的破れを議論する。南部-Goldstoneの定理やHiggs現象についての記述はやや標準的であるが，他の教科書ではあまり触れていない低エネルギー定理や非線形表現についても説明しておいた。最後の節は少し長くなったがWeinberg-Salam模型について重要な事柄をもらさず述べた。

7,**8**章はくりこみを扱った。筆者は，場の理論の勉強を始めた頃，くりこみがよくわからなくて長い間困った経験がある。そこで本書では，初めにくりこみとは結局何をやることなのか，物理的な意味が明確になるよう説明した(つもりである)。複合演算子のくりこみや演算子積展開などは，比較的高度な内容なので入門書では割愛されることも多いが，強い相互作用への応用上の重要性を考慮してあえて加えることにした。わかりやすく説明したつもりであるが，もし難しければ初読の際はとばしてもらってよい。

9章は量子異常とも呼ばれるアノマリーを扱った。アノマリーは発見以来20年経つが，つい最近まで次々とその種々な深い意味が明らかにされ続けてきたもので，本書ではそれらを詳しく説明した。

ゲージ場の量子論は，非常に豊かな内容と精緻な構成を持った，人類の文化の素晴らしい創造物であるが，果たして本書がその美しさを読者にう

まく伝え得たか心もとない。わかりやすくと思うあまり説明がくどくなった部分もあるかもしれない。しかし筆者の示したかったことは，場の理論は確かに進んだレベルの学問であるけれども，難しいものではないということである。本書を読んでこの分野に興味を覚え，近い将来この分野の研究をさらに発展させてくれる読者がいれば，著者の喜びこれに勝るものはない。

本書を書くよう勧めていただいた中西 襄先生には，研究上の御指導をはじめひとかたならぬ御世話になった。また5章の内容については，小嶋泉氏との共同研究に負う所が多い。培風館の野原 剛，村山高志両氏は，なかなか原稿を書こうとしない筆者を8年間も忍耐強く激励して下さった。編集段階では編集部の飯島純子氏にもお世話になった。これらの方々に心から感謝したい。また，原稿執筆中の1年間は家族にも大変迷惑をかけた。妻 和子の助けには特に感謝している。最後に，常に私を支え励ましてきてくれた母 初子にこの本を献げたい。

1989年6月

九後 汰一郎

目　次

I巻 主要目次

6. 対称性の自発的破れ

6-1 対称性の自発的破れと南部-Goldstone の定理

ある作用積分 $S=\int d^4x\ \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$ で記述される系が，連続パラメータの大局的 (x によらない) 変換群 G の下で不変であるとする。そうすれば，1-3 の Noether の定理により，群 G の独立な生成子 T^A の各々に対し，保存するカレント j_μ^A，$\partial^\mu j_\mu^A=0$，が存在し，その電荷演算子 $Q^A\equiv\int d^3x\ j_{\mu=0}^A$ は場 ϕ に対しもとの対称性の無限小変換の生成子となる：

$$[i\epsilon_A Q^A, \phi_i]=\epsilon_A\,\delta^A\phi_i \qquad (A=1,2,\cdots,\dim G) \tag{1}$$

ここで，$\delta^A\phi_i$ は必ずしももとの場 ϕ に関して線形，$\delta^A\phi_i=iT_{ij}^A\phi_j$，と仮定する必要はない。

さて，作用積分の対称性は，系の基底状態——真空の対称性である場合もあれば，そうでない場合もある；すなわち，標記的に

$$\begin{aligned} &\text{i)}\quad Q^A|0\rangle=0, \quad (\text{すべての } A \text{ に対し}) \\ &\text{ii)}\quad Q^A|0\rangle\neq 0, \quad (\text{ある } A \text{ に対し}) \end{aligned} \tag{2}$$

の 2 通りがある。系は，i) の場合，対称性を実現している，あるいは Wigner (ウィグナー) 相 (phase) にある，ii) の場合，対称性が自発的に破れた相 (spontaneous symmetry broken phase) または南部-Goldstone (ゴールドストン) 相にある，と呼ばれる。

Wigner 相 (2) で“標記的に”と書いた理由は，実は，そもそもカレントの時間成分 $j_{\mu=0}^A$ の全空間にわたる積分

$$Q^A=\int d^3x\, j^A_{\mu=0}(x) \tag{3}$$

が収束して，電荷 Q^A が well-defined な演算子として存在するのは i) の場合しかない，からである：すなわち，(3) の積分が存在するなら

$$Q^A|0\rangle=0 \tag{4}$$

が従うことがいえる。それゆえ，$Q^A|0\rangle\neq 0$ という標記的書き方は，Q^A そのものが well-defined な演算子として存在していない，ということを表している。

(4) の証明は簡単である。Q^A が Lorentz スカラーの場合，すなわち j^A_μ がベクトルの場合，をまず考えよう。(3) の Q^A は全空間積分であるから空間並進不変であり，かつまた保存量であるから時間方向にも並進不変である：

$$[P_\mu, Q^A]=0 \tag{5}$$

したがって，$P_\mu Q^A|0\rangle=Q^A P_\mu|0\rangle=0$ ゆえ，$Q^A|0\rangle$ は真空 $|0\rangle$ と同じく 4 次元運動量 $P_\mu=0$ の固有状態である。しかし，スペクトル条件 **3-1** の ii) の仮定により，$P_\mu=0$ の固有値を実現するのは真空 $|0\rangle$ のみであるから，

$$Q^A|0\rangle=c|0\rangle \qquad c：比例係数 \tag{6}$$

でなければならない。(6) と $\langle 0|$ との内積をとれば

$$c=\langle 0|Q^A|0\rangle=\int d^3x\,\langle 0|j^A_{\mu=0}(x)|0\rangle \tag{7}$$

となる。ところが，真空の並進不変性，Lorentz 不変性から

$$\langle 0|j^A_\mu(x)|0\rangle=\langle 0|j^A_\mu(0)|0\rangle \tag{8}$$

は，定数のベクトル量でなければならないが，そのような量は 0 以外手元に存在せず，(8)，したがって，(7) の c が 0 であることが結論され，(4) が証明された。Q^A がスカラーでない，例えば，Lorentz 変換生成子 $M_{\mu\nu}$ のような場合にも，P_μ との交換関係を使って，依然 $P_\mu Q^A|0\rangle=0$ がいえるので，同じ証明が成り立つ。

いったん保存電荷 Q^A が well-defined な演算子として存在すれば，**5-8** で一般的に証明したように，あらゆる**漸近場**は Q^A の下で**線形**に変換する。したがって，系の状態は，Q^A のなす群 G（または代数 $\mathcal{G}$）の線形表現となり，理論のスペクトルは，G の各既約表現ごとに縮退した多重項で分類されることになる。真空は，もちろん，(4) より G の 1 重項である。また，各粒子の間の相互作用も群 G の下での不変性で関係付けられる。

南部-Goldstone相 このように，粒子のスペクトルや相互作用において対称性が明白なWigner相に対し，対称性が自発的に破れた南部-Goldstone相では，粒子状態（漸近場）はもはや群Gの既約表現には対応せず，対称性は明白ではなくなる。しかし，その代わり，自発的に破れた対称性は，必ず零質量の粒子——**南部-Goldstone (NG) 粒子**と呼ばれる——の存在を導き（南部-Goldstone定理），しかも，これらのNG粒子が低エネルギー極限でどのような相互作用をするかも決定してしまう（低エネルギー定理）。

南部-Goldstone相では，一般には，群Gの対称性がすべて破れるのではなく，一部が破れずに残る。$Q^A|0\rangle=0$を満たす電荷Q^Aに対応するGの生成子T^Aを"破れていない生成子"(unbroken generator)，$Q^A|0\rangle\neq 0$のT^Aを"破れた生成子"(broken generator)と呼ぶが，破れていない生成子どうしの交換子はまた破れていない生成子を与えるから，破れていない生成子は全体の代数$\mathcal{G}$の中で閉じた部分代数$\mathcal{H}$をなす：すなわち，$\mathcal{G}$の生成子T^Aを破れていない部分代数$\mathcal{H}$に属する部分と，それ以外に分離して

$$\{T^A\in\mathcal{G}\}=\{S^a\in\mathcal{H},\ \ X^a\in\mathcal{G}-\mathcal{H}\} \tag{9}$$

と書こう。破れた生成子X^aの定義には，常に破れていない生成子の成分を足し引きする不定性があるが，$\mathcal{H}$に直交するよう，

$$\forall S^a\in\mathcal{H},\ \ \forall X^a\in\mathcal{G}-\mathcal{H}\qquad \text{に対し}\qquad \mathrm{tr}(S^aX^a)=0 \tag{10}$$

ととっておくのが便利である。[ここでtrの中のS^a, X^aは群Gのある表現をとったときの，生成子S^a, X^aの表現行列の意味で，(10)の直交性はとった表現によらない概念である。] 代数$\mathcal{H}$に対応する群を$H(\ni e^{i\theta^aS^a})$と書き，破れていない部分群と呼ぶ。

さて，先に指摘したように，$Q^A|0\rangle\neq 0$ということは，そもそも電荷Q^Aがwell-definedな演算子として存在しないことを意味するのだから，対称性の自発的破れが起こっている条件としてQ^Aを用いた$Q^A|0\rangle\neq 0$よりも，もう少し適切なものが欲しい。それには，ある局所的演算子$\Phi(y)$（すなわちyの近傍の有限領域のHeisenberg場で書かれた演算子）のQ^Aによる変換†

$$[iQ^A, \Phi(y)]\equiv\int d^3x\, i[j^A_{\mu=0}(x), \Phi(y)]=\delta^A\Phi(y) \tag{11}$$

† 表記の簡単のためQ^AをBose的演算子としたが，Fermi的演算子の場合への拡張は自明であろう。

を考えるとよい。これなら，たとえ Q^A 自身が存在しない場合でも，中辺の意味に理解すれば，交換関係 $[j_\mu^A(x), \Phi(y)]$ は y の近傍の有限領域でのみ 0 でないから，$\int d^3x$ 積分は存在し well-defined である。そこで，交換関係 $[Q^A, \Phi(x)]$ を常にこの意味に理解して，対称性の自発的破れは，

$$\langle 0|[iQ^A, \Phi(x)]|0\rangle = \langle 0|\delta^A\Phi(x)|0\rangle \neq 0 \tag{12}$$

となるような局所場演算子 $\Phi(x)$ が少なくとも一つある，という条件で定義されることになる。演算子 $\Phi(x)$ は，Lagrangian に現れている“素” Heisenberg 場 $\phi_i(x)$ である必要はなく一般に x の近傍の有限領域 $\mathcal{D}_x$ の $\{\phi_i(y)\}_{y\in\mathcal{D}_x}$ の並進共変† な多項式でよい。しかし，Q^A がスカラー (j_μ^A がベクトル) の場合は，$\Phi(x)$ はスカラー量に限って十分である。

[南部-Goldstone 定理]

i ）理論が並進不変性と明白な Lorentz 共変性を持ち，

ii ）保存するベクトル・カレント j_μ，$\partial^\mu j_\mu = 0$，が存在して，

iii）その電荷 $Q \equiv \int d^3x\, j_{\mu=0}(x)$ の対称性が自発的に破れている，すなわち，(12) を満たすスカラー場演算子 $\Phi(x)$ がある，

と仮定する。そうすれば，理論には，零質量の粒子 (NG 粒子) が存在し，カレント $j_\mu(x)$ に結合している。

(証明)　**3-1** で与えた $\langle 0|[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle$ に対するスペクトル表示の導出と同じ手続きを行えば，容易に

$$\langle 0|[j_\mu(x), \Phi(y)]|0\rangle = \int_0^\infty d\sigma^2\, \rho(\sigma^2)\, i\partial_\mu \Delta(x-y\,;\,\sigma^2) \tag{13}$$

を得ることができる。ただし，ここのスペクトル関数 $\rho(\sigma^2)$ は

$$\begin{aligned} &-ik_\mu\, \rho(\sigma^2 = k^2) \\ &\quad \equiv (2\pi)^3 \sum_{n,n'} \delta^4(p_n - k)\langle 0|j_\mu(0)|n\rangle\, \eta^{-1}_{nn'} \langle n'|\Phi(0)|0\rangle \end{aligned} \tag{14}$$

で与えられるもので，系の (正定値と限らない) 完全系を $\sum_{n,n'} |n\rangle \eta^{-1}_{nn'} \langle n'| = 1$ とした。この式の導出には $\mathcal{O} = j_\mu, \Phi$ が並進共変性 $\mathcal{O}(x) = e^{iPx}\mathcal{O}(0)e^{-iPx}$ を持つこと，j_μ がベクトル，Φ がスカラーであること，を用いた。

(13) からただちに，

---

† $\Phi(x) = e^{iPx}\Phi(0)\,e^{-iPx}$ を満たすとき，$\Phi(x)$ を並進共変と呼ぶ。例えば，$\Phi(x) = \int d^4r\, f(r)\phi(x+r)\phi(x-r)$ は並進共変である。

$$\langle 0|\mathrm{T}\, j_\mu(x)\,\Phi(0)|0\rangle=\int_0^\infty d\sigma^2\,\rho(\sigma^2)\partial_\mu \Delta_F(x\,;\,\sigma^2) \tag{15}$$

が従う。この両辺に $\int d^4x\, i\partial^\mu$ を演算する。そうすれば，左辺は，カレント保存則 $\partial^\mu j_\mu=0$ と (11) とを用いて

$$\begin{aligned}\int d^4x\; i\partial^\mu \langle 0|\mathrm{T}\, j_\mu(x)\,\Phi(0)|0\rangle &=\int d^4x\; i\delta(x_0)\langle 0|[j_0(x),\Phi(0)]|0\rangle\\ &=\langle 0|[iQ,\Phi(0)]|0\rangle\\ &=\langle 0|\delta\Phi(0)|0\rangle\neq 0\end{aligned} \tag{16}$$

と評価され，右辺の方は，

$$\begin{aligned}\int d^4x\; i\partial^\mu[(15)\,\text{右辺}] &=\lim_{p\to 0}\int d^4x\; e^{ipx}\int d\sigma^2\,\rho(\sigma^2)i\,\Box\,\Delta_F(x\,;\,\sigma^2)\\ &=\lim_{p\to 0}\int d\sigma^2\,\frac{\rho(\sigma^2)(-ip^2)}{i(\sigma^2-p^2-i\epsilon)}\end{aligned} \tag{17}$$

となる。ここで，(17) の最後の量が $p^\mu\to 0$ 極限で生き残り得るのは，スペクトル関数 $\rho(\sigma^2)$ の中に零質量 1 粒子離散スペクトル $\propto\delta(\sigma^2)$ の寄与があるときのみであることがわかるから，その部分を分離して

$$\rho(\sigma^2)=w\delta(\sigma^2)+\tilde{\rho}(\sigma^2) \tag{18}$$

と書けば，(17) はその部分の係数 w を与える。これと (16) とから

$$w=\langle 0|\delta\Phi(0)|0\rangle\neq 0 \tag{19}$$

の等式を得る。すなわち，対称性の自発的破れがある，$\langle 0|\delta\Phi|0\rangle\neq 0$ である限り，スペクトル関数 $\rho(\sigma^2)$ の中に $w\delta(\sigma^2)$ 項が 0 でなく存在せねばならない。これは，スペクトル関数の定義 (14) から，理論の完全系 $\{|n\rangle\}$ の中に零質量 1 粒子状態 $|\boldsymbol{p}(m=0)\rangle$ (およびその相棒 $\langle\boldsymbol{p}(m=0)'|$) が存在して，カレント j_μ と場 Φ とに同時に結合している，

$$\langle 0|j_\mu(0)|\boldsymbol{p}(m=0)\rangle\neq 0,\quad \langle\boldsymbol{p}(m=0)'|\Phi(0)|0\rangle\neq 0 \tag{20}$$

ことを示している。(証明終)

ここで，この定理に関していくつかのコメントをしておこう。

1) 真空期待値 $\langle 0|\delta\Phi(0)|0\rangle$ はオーダー・パラメータ (order parameter) と呼ばれ，それが 0 か 0 でないかが自発的破れの有無を決める。オーダー・パラメータの演算子 $\delta\Phi$ は，Lorentz 不変性を破らず 0 でない値をとるためには，スカラーでなければならない†。したがって，電荷

† あるいは，不変テンソル $g_{\mu\nu}$, $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ の存在する 2 階対称テンソルおよび 4 階反対称テンソルでもよい。例えば $(\delta\Phi)_{\mu\nu}$ が 2 階対称テンソルなら $\langle 0|(\delta\Phi)_{\mu\nu}|0\rangle=g_{\mu\nu}\times$(定数) の真空期待値をとれる。

Q がスカラーの場合は，$\delta\Phi$ に対応する場 Φ もスカラーであり，定理の要求する

$$\text{F.T.}\langle 0|\mathrm{T}\, j_\mu(x)\,\Phi(y)|0\rangle\Big|_{\text{零質量 pole 部分}}=\langle 0|\delta\Phi|0\rangle\frac{-ip_\mu}{i(-p^2)} \tag{21}$$

の $p^2=0$ での pole を作る NG 粒子もスカラーである。すなわち，(21) の pole の存在は，

$$j_\mu(x) \underset{x_0\to\pm\infty}{\longrightarrow} f_\pi\,\partial_\mu\phi^{\text{as}}(x)+\cdots,\quad [\phi^{\text{as}}(x),\phi^{\text{as}}(y)]=iD(x-y), \tag{22}$$

$$\Phi(x)\longrightarrow Z^{\frac{1}{2}}\phi^{\text{as}}(x)+\cdots,\qquad (f_\pi Z^{\frac{1}{2}}=\langle 0|\delta\Phi|0\rangle) \tag{23}$$

なる零質量スカラー NG 粒子の漸近場 ϕ^{as} の存在を意味する。f_π は，NG 粒子 ϕ^{as} がカレント j_μ に結合する強さを表す結合定数で，崩壊定数 (decay constant) と呼ばれる†。

2） 不定計量を含むゲージ理論では，NG 粒子が正の計量を持つ物理的粒子であるかどうかについて，定理は何も主張していない。もしカレント j_μ がゲージ (BRS) 不変な演算子でなければ，NG 粒子は不定計量粒子であり得て，その場合，上の (22), (23) は，一般に

$$\begin{aligned} j_\mu(x) &\longrightarrow f_\pi\,\partial_\mu\tilde{\phi}^{\text{as}}(x)+\cdots,\\ \Phi(x) &\longrightarrow Z^{\frac{1}{2}}\phi^{\text{as}}(x)+\cdots, \end{aligned}\quad [\tilde{\phi}^{\text{as}}(x),\phi^{\text{as}}(y)]=iD(x-y) \tag{24}$$

に置き換えられ，$\tilde{\phi}^{\text{as}}$ と ϕ^{as} とが同一の漸近場である必然性がなくなる。しかも，(Φ がスカラーだから ϕ^{as} はスカラーだけれど) j_μ の漸近場 $\partial_\mu\tilde{\phi}^{\text{as}}$ はスカラーという保証はなく，ベクトル場 V_μ^{as} の縦波モード部分でもよい。実際，QCD の $U(1)$ 問題では，このようなことが起こっている (べき) ことが知られていて，V_μ^{as} は 2 階反対称テンソル場 $A_{\mu\nu}^{\text{as}}$ を用いて $V_\mu^{\text{as}}=\epsilon_\mu{}^{\nu\rho\sigma}\partial_\nu A_{\rho\sigma}^{\text{as}}$ で与えられる。

3） 上で，対称性が自発的に破れた際には，電荷演算子 Q が well-defined でなくなることを述べたが，その直接的原因は，カレント $j_\mu(x)$ にこの NG 1 粒子状態が効いているために遠方で十分速く落ちず，$j_0(x)$ の空間積分が発散してしまう，というところにある。

この事情を，(22) を使って (NG 粒子 ϕ^{as} が正計量のときに)，もう少し詳しく見てみよう。$\phi^{\text{as}}(x)$ の生成演算子を $a^\dagger(\boldsymbol{k})$ と書き，次の NG ボソン 1 粒子状態を考える。

---

† 崩壊定数と呼ばれる理由は，代表的 NG 粒子である $\pi^\pm$ 中間子の崩壊 $\pi^\pm\to l+\nu_l$ の振幅の大きさがこの f_π で決まるからである。(演習問題 4.10 参照)

$$|\mathrm{NG}\rangle=\int d^3k\, g(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle \tag{25}$$

この“波束”状態のノルムは，$[a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{q})]=\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})$ より

$$\langle\mathrm{NG}|\mathrm{NG}\rangle=\int d^3k\,|g(\boldsymbol{k})|^2 \tag{26}$$

で与えられるから，例えば，$g(\boldsymbol{k})$ を

$$g(\boldsymbol{k})=\begin{cases}\dfrac{1}{|\boldsymbol{k}|^\alpha} & |\boldsymbol{k}|\leqq {}^\exists K \\ 0 & |\boldsymbol{k}|>K\end{cases} \tag{27}$$

ととると，$\alpha<3/2$ であればノルムが収束し，(25) の状態 $|\mathrm{NG}\rangle$ は well-defined である。ところが，この状態と真空ではさんだ j_μ の行列要素は，(22) の表式を用いて [**3-2** (7) を思い起こせ]

$$\begin{aligned}\langle 0|j_\mu(x)|\mathrm{NG}\rangle&=f_\pi\langle 0|\partial_\mu\phi^{\mathrm{as}}(x)|\mathrm{NG}\rangle\\ &=f_\pi\int d^3k\,(-ik_\mu)g(\boldsymbol{k})e^{-ikx}/\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}\quad(k_0=|\boldsymbol{k}|)\end{aligned} \tag{28}$$

となり，この時間成分の空間積分は

$$\int d^3x\,\langle 0|j_0(x)|\mathrm{NG}\rangle=-if_\pi 2\sqrt{\pi^3}\left[e^{-ik_0x_0}\sqrt{k_0}\,g(\boldsymbol{k})\right]_{\boldsymbol{k}=0} \tag{29}$$

となるから，(27) の $g(\boldsymbol{k})=|\boldsymbol{k}|^{-\alpha}$ の α が，$1/2<\alpha$ であれば発散することになる†。例えば，$\alpha=1$ ととると，(25) の状態は well-defined なのに (29) の行列要素 $\langle 0|Q|\mathrm{NG}\rangle$ は発散しており，したがって Q が well-defined な演算子として存在しないことを示している。(25) から (29) に至る計算は ϕ^{as} が零質量であることを何も本質的に使ってないが，そもそも (22) の j_μ に現れ得るスカラー 1 粒子状態 (漸近場) ϕ^{as} は，$\partial^\mu j_\mu=0$ の条件から $\Box\phi^{\mathrm{as}}=0$ が従うので，零質量粒子以外あり得ないことに注意しておこう。

4） 次に重要な注意は，先に (9) で述べたような，群 G の対称性がその部分群 H にまで自発的に破れた場合に，NG 粒子がいくつ出るかについてである。破れた生成子 $X^a\in\mathcal{G}-\mathcal{H}$ に対応する電荷 Q^a またはカレント j^a_μ の各々に対して，上の南部-Goldstone 定理が当てはまるから

$$X^a\in\mathcal{G}-\mathcal{H}\ \text{の各々に対し}\qquad j^a_\mu(x)\ \to\ f^a_\pi\,\partial_\mu\phi^{a,\mathrm{as}}+\cdots, \tag{30}$$

なる NG 粒子漸近場 $\phi^{a,\mathrm{as}}$ が存在する。しかし，問題は $\phi^{a,\mathrm{as}}$ がすべて独立

---

† n 次元時空の理論では，(25) の状態のノルムの収束条件は $\alpha<(n-1)/2$，(29) の行列要素の発散条件は上と同じく $1/2<\alpha$ である。それゆえ，特に 2 次元時空，$n=2$，の場合は，4 次元や 3 次元の場合と異なり，j_μ が零質量ボソン場 ϕ で $j_\mu=\partial_\mu\phi$ と書かれていても，電荷 $Q=\int d^1x\, j_0(x)$ は well-defined な演算子であり得る。

な場か？という点である。もし独立でないとすると，(30) の j_μ^a の適当な線形結合 $\sum_a c^a j_\mu^a$ には NG 1 粒子項がなくなり，$\sum_a c^a Q^a$ は well-defined な電荷となる。これは，対応する生成子 $\sum_a c^a X^a$ が破れてない生成子になることを意味し，もとの X^a が独立な破れた生成子であったという仮定に反する。したがって，**独立な破れた生成子 $X^a \in \mathcal{G}-\mathcal{H}$ に対しては，各々 1 個ずつ独立な零質量 NG 粒子が対応する。**それゆえ，対称性が自発的に G から H に破れるときに現れる NG 粒子の個数は

$$\dim G/H = \dim G - \dim H \tag{31}$$

で与えられる。

5) 上の定理では電荷 Q がスカラーの場合に限ったが，この仮定は，(13) のスペクトル表示を簡単にするためにおいたもので，あまり本質的ではない。実際，電荷 Q が (Poincaré 群生成子，すなわち，並進生成子 P_μ と Lorentz 群生成子 $M_{\mu\nu}$，以外の) ベクトル，テンソル，スピノール，の場合でも，それに応じて場 Φ をベクトル，テンソル，スピノールに選べば，$\langle 0|[Q,\Phi]|0\rangle = \langle 0|\delta\Phi|0\rangle \neq 0$ である限り，カレント j_μ および Φ に零質量 NG 粒子が結合していることが示せる。例えば，フェルミオンとボソンを結び付ける超対称性の電荷 Q_α は Majorana スピノールの Fermi 的電荷で，これが自発的に破れると Majorana スピノールの NG フェルミオンが現れる (演習問題 6.1)。ただ，注意すべきは，例えばベクトル電荷 Q_μ の場合に，ベクトルの場 Φ_ν に対して

$$\langle 0|[Q_\mu, \Phi_\nu(x)]|0\rangle = \langle 0|\delta_\mu \Phi_\nu(x)|0\rangle = g_{\mu\nu}\times(\text{定数}) \neq 0 \tag{32}$$

だからといって，すぐにベクトル NG ボソンが存在するとはいえない点である。応々にして，スカラー NG ボソンで (32) の関係を満たせる。論理的には (実例を知らないが) テンソル NG ボソン の可能性も除外できない。これらの可能性のどれが実現しているかは，電荷 Q のもっと詳細な情報が必要になる。(演習問題 6.6 参照)

これに関連して知っておいて悪くない事実として，Coleman (コールマン)-Mandula (マンデューラ)-Haag-Łopuszanski (ロプザンスキ)-Sohnius (ゾーニウス) の定理がある；すなわち，一般に **Poincaré 不変な理論において，物理的 S 行列の (連続的) 対称性として存在し得る保存電荷は，Poincaré 生成子 P_μ, $M_{\mu\nu}$ 以外には，スカラー (Bose 電荷) または (1 階の) スピノール (Fermi 電荷) のみである。**これは，かなり一般的に妥当

な仮定の下に証明される大変強力な定理である。したがって，例えば，ある Lagrangian に，4次元運動量 P_μ とは別のベクトル電荷 Q_μ の対称性があったとすると，Poincaré 不変性を破らない限り，必ず，i) Q_μ の対称性は自発的に破れる，もしくは ii) Q_μ は非物理的粒子のみを動かす対称性になる，のどちらかである。BRS 電荷はスカラーだが Fermi 電荷なので，上の定理から許されない対称性で，後者 ii) の実現例になっている。

6） 南部-Goldstone 定理の適用範囲はかなり広範で，実は Poincaré 不変性さえなくとも，それに代わる適当な仮定（これもバラエティがある）があれば成り立つ。例えば，物性論では，強磁性におけるスピン波や，固体におけるフォノンなど，多くの NG モードがある。NG モードと言ったのは，（そこでは相対論的粒子描像は存在しないから）運動量 $\boldsymbol{k}$ が 0 になるときにエネルギー E も 0 になる励起モードという意味である。

6-2 対称性の自発的破れを起こす模型：二例

Goldstone 模型 対称性の自発的破れが起こる最も簡単な例は，次の Lagrangian 密度を持つ系で，Goldstone 模型と呼ばれる：

$$\mathcal{L}=\partial_\mu\varphi^\dagger\partial^\mu\varphi+\mu^2\varphi^\dagger\varphi-\frac{\lambda}{2}(\varphi^\dagger\varphi)^2 \tag{1}$$

この系は，複素スカラー場 φ の ϕ^4 型相互作用系で，**1-4** (9) で与えたものと同じ形であるが，質量項 $+\mu^2\varphi^\dagger\varphi$ の符号が逆にしてあるところが本質的な違いである。それゆえ，通常の $\langle 0|\varphi|0\rangle=0$ の真空の上では，φ の場の励起モードは，負の2乗質量 $-\mu^2$（＝虚数質量）を持つ，いわゆるタキオン (tachyon) となる。タキオン・モードの存在は，その時間発展が

$$\exp(\mp i\sqrt{\boldsymbol{k}^2-\mu^2}\,t)=\exp(\pm|\mu^2-\boldsymbol{k}^2|^{\frac{1}{2}}t) \qquad (|\boldsymbol{k}|<\mu \text{ に対し}) \tag{2}$$

で与えられるので，長波長側のモードが時間が経つと指数関数的に増大し，もはや微小な励起にとどまらないこと，すなわち，もとの真空が時間発展で不安定であることを意味する。

この系 (1) の持つ対称性は，**1-4** (10) の位相変換

$$\varphi'(x)=e^{i\theta}\varphi(x), \qquad \varphi^{\dagger\prime}(x)=e^{-i\theta}\varphi^\dagger(x) \tag{3}$$

の下での $G=U(1)\simeq O(2)$ 不変性である。対応する Noether カレント，および電荷による無限小変換は，**1-4** の (12), (14) で与えた：

$$j_\mu = -i\varphi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi, \tag{4}$$

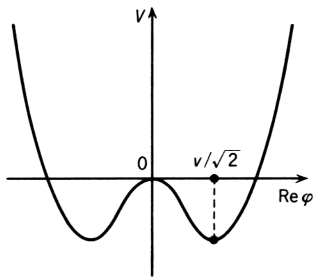
$$[iQ, \varphi(x)] = i\varphi(x) \qquad \left(Q = \int d^3x\, j_0(x)\right). \tag{5}$$

さて，一般に系の安定な真空の候補は，**4-5** で定義した有効ポテンシャル $V(\varphi)$ の† 停留点 $\partial V/\partial\varphi = 0$ で与えられる。**4-5** (49) の公式により，$V(\varphi)$ は $\hbar$ 展開 (loop 展開) の 0 次の近似では，(1) の Lagrangian のポテンシャル項 $V_0(\varphi)$ で与えられるから

$$V(\varphi) = -\mu^2\varphi^*\varphi + \frac{\lambda}{2}(\varphi^*\varphi)^2 + O(\hbar) \tag{6}$$

となる。このポテンシャルは，(3) の $U(1)$ 不変性を反映して，φ の大きさ $|\varphi|$ のみに依存しており，6·1 図に描いた φ の実軸での断面図を，V 軸まわりに回転して得られるワイン瓶の底部のような形をしている。(6) の $V(\varphi)$ の停留点は，もとの不安定な真空に対応する $\varphi=0$ の他に，

$$|\varphi| = \frac{v}{\sqrt{2}} \equiv \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \tag{7}$$



6·1 図

の円周上の点（ワイン瓶の底）がある。

$|\varphi| = v/\sqrt{2}$ の円周上の点は，どの点をとっても物理的に同等であるが，どの点をとっても一つとれば，その真空は場 φ の位相を一つ選び出すことになり，(3) の $U(1)$ 位相対称性を自発的に破る。

(7) の円周の実軸と交わる点を選ぶことにすれば，その真空 $|0\rangle$ は

$$\langle 0|\varphi(x)|0\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \tag{8}$$

を実現する。したがって，複素場 $\varphi(x)$ を真空期待値 $v/\sqrt{2}$ だけシフトして

$$\varphi(x) = (v + \psi(x) + i\chi(x))/\sqrt{2} \tag{9}$$

と書けば，実場 ψ, χ は共に真空期待値 0 でこの真空上の適切な場となる。(9) を代入して，(1) の Lagrangian (= $O(\hbar^0)$ での有効作用 $\Gamma[\varphi]$ の密度) を ψ, χ で書き直せば，

---

† $V(\varphi)$ の引数 φ (c 数) と Heisenberg 場演算子 φ とを同じ文字で表すが混同なきよう。前者は後者の期待値である。

$$\mathcal{L}=-V_0(v)+\frac{1}{2}[(\partial_\mu\psi)^2-m^2\psi^2]+\frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 \\ -\frac{1}{2}m\sqrt{\lambda}\psi(\psi^2+\chi^2)-\frac{\lambda}{8}(\psi^2+\chi^2)^2 \quad (10)$$

を得る。ただし，ψ の 2 乗質量 m^2 は

$$m^2=2\mu^2>0 \quad (11)$$

で与えられ，新しい真空の (微小振動に対する) 安定性を示している。一方，χ は，(10) よりその質量項が 0 であり，この $U(1)$ 対称性の自発的破れに対応した NG ボソンの場であることがわかる。実際，このことは，(9) を用いて，(5) の変換則の虚数部分の真空期待値が

$$\langle 0|[iQ,\chi(x)]|0\rangle=\langle 0|(v+\psi(x))|0\rangle=v\neq 0, \quad (12)$$

となること，あるいは，カレント (4) の場について 1 次の項が

$$j_\mu(x)=v\partial_\mu\chi(x)+\cdots \quad (13)$$

の形をとること，からも理解される。この $O(\hbar^0)$ の近似のレベルでは，χ が (10) より正しく規格化された NG ボソン Heisenberg 場であることがわかるから，(13) は，**6-1** (22) と比較して，真空期待値 (の $\sqrt{2}$ 倍) v が NG ボソンの崩壊定数 f_π を与えていることを示している。

南部-Goldstone 定理の別証明　上の Goldstone 模型で，書き直した Lagrangian (10) において，χ の質量項が 0 で，ψ の質量項が正しい符号の $-(1/2)m^2\psi^2$ となった理由を考え直せば，これら場の 2 次の項は，$\mathcal{L}$ の中のポテンシャル項 $-V_0(\varphi)$ だけからきており，その停留点 $\varphi=v/\sqrt{2}$ まわりでの曲率 (2×2) 行列 $\partial^2 V_0/\partial\varphi_i\partial\varphi_j|_{\varphi=v/\sqrt{2}}$ の固有値が 0 と m^2 なのだ，ということに気付く。ポテンシャル $V_0(\varphi)$ は，6·1 図を回転したワイン瓶の形であるから，瓶の底の一点 $\varphi=v/\sqrt{2}$ のまわりで見ると，動径方向 (Re φ 方向) の曲率が一番大きく，それが ψ の 2 乗質量固有値 m^2 を与え，一方，円周方向 (Im φ 方向) は，そもそも $U(1)$ 対称性によりポテンシャルの値が変化しない方向であるから，曲率が 0 で，NG ボソン χ の零質量を与えるのである。

この見方は，NG ボソンがなぜ零質量になるのかを，ポテンシャル項 V_0 の持つ対称性から直接，視覚的に明快に，説明するもので興味深い。と同時に，これは次のように容易に一般化でき，南部-Goldstone 定理の別証を与える。

(別証明)　局所的 Heisenberg 場の一組 $\{\Phi_i(x)\}$ が，理論の対称性の群

G のある既約表現 R の基底となっているとする；すなわち

$$[iQ^A, \Phi_i(x)] \equiv \int d^3y \; i[j^A_{\mu=0}(y), \Phi_i(x)]$$
$$= iT^A_{ij}\Phi_j(x). \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{14}$$

T^A_{ij} はこの既約表現 R での G の生成子 T^A の表現行列である。$\Phi_i(x)$ は一般に "素" Heisenberg 場の多項式で与えられる複合場であり，(14) はもとの Lagrangian の対称性 6-1 (1) が線形変換であると主張するものではない。

さて，この複合場 $\Phi_i(x)$ に対する外場 $J_i(x)$ を導入し，

$$\exp iW[J] = \langle 0|\mathrm{T}\exp[i\int d^4x \, J_i(x)\Phi_i(x)]|0\rangle \tag{15}$$

で $W[J]$ を定義し，4-5 の手続きで $W[J]$ の Legendre 変換を行って，有効作用 $\Gamma[\Phi]$，有効ポテンシャル $V(\Phi)$ を求めたとする†。(14) は G の対称性が複合場 Φ_i の上で線形に表現されていることを示しているから，$\Gamma[\Phi]$, $V(\Phi)$ は明らかに線形変換 $\Phi_i \to \Phi_i + i\epsilon^A T^A_{ij}\Phi_j$ の下で不変で，したがって，特に $V(\Phi)$ は

$$\frac{\partial V(\Phi)}{\partial \Phi_j} T^A_{jk}\Phi_k = 0 \tag{16}$$

を満たす。これは Φ についての恒等式であり，これをさらに Φ_i について微分すれば，

$$\frac{\partial^2 V(\Phi)}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j} T^A_{jk}\Phi_k + \frac{\partial V(\Phi)}{\partial \Phi_j} T^A_{ji} = 0. \tag{17}$$

いま，ある真空 $|0\rangle$ で複合場（演算子）$\Phi_i(x)$ の期待値が

$$\langle 0|\Phi_i(x)|0\rangle = v_i \neq 0 \tag{18}$$

となったとすれば，(14) の交換関係の真空期待値より

$$\begin{aligned} T^A_{ij}v_j = 0 &\iff \text{破れていない生成子 } T^A \in \mathcal{H}, \\ T^A_{ij}v_j \neq 0 &\iff \text{破れた生成子 } T^A \in \mathcal{G} - \mathcal{H}, \end{aligned} \tag{19}$$

と対応することがわかる。一方，(17) をこの真空に対応する $\Phi_i = v_i$ の点で見てみれば，真空は V の停留点であるから第 2 項は落ち，

$$\left[\frac{\partial^2 V(\Phi)}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j}\right]_{\Phi=v} T^A_{jk} v_k = 0 \tag{20}$$

が得られる。

† 再び，$\Gamma[\Phi]$, $V(\Phi)$ の引数 Φ は c 数で，同じ文字で表した Heisenberg 場 Φ の期待値である。

ところが，次のことに注意しよう。一般に，$\langle 0|\Phi_i(x)|0\rangle = v_i \neq 0$ となる真空上での Green 関数は，場 $\Phi_i(x)$ を $v_i + \tilde{\Phi}_i(x)$ と真空期待値分 v_i だけシフトして定義しなければならないから，有効作用 $\Gamma[\Phi] = \Gamma[\tilde{\Phi} + v]$ においても，$\Phi = v$ のまわりで Taylor 展開した

$$\Gamma[\Phi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \, \tilde{\Phi}_{i_1}(x_1) \cdots \tilde{\Phi}_{i_n}(x_n) \, \Gamma^{(n)}_{v, i_1 \cdots i_n}(x_1 \cdots x_n) \tag{21}$$

の係数 $\Gamma^{(n)}_v$ が，この真空上の場 $\tilde{\Phi}_i(x)$ の 1PI な n 点項点関数を与える。[この式 (21) はもちろん $v=0$ のときは通常の展開 **4-5** (8) に帰着する。] さらに **4-5** (31) で与えた注意を思い起こせば，$V(\Phi)$ の $\Phi = v$ まわりの Taylor 展開の係数 $V^{(n)}_v$ が運動量表示の [運動量保存因子 $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \cdots + p_n)$ を外した] $-\tilde{\Gamma}^{(n)}_v(p_1 \cdots p_n)$ の $p=0$ での値と一致していることがわかるから，特に

$$\left[\frac{\partial^2 V(\Phi)}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j} \right]_{\Phi = v} = -\tilde{\Gamma}^{(2)}_{v, ij}(p=0) = \Delta'^{-1}_{F, ij}(p=0) \tag{22}$$

は，この真空上の full な伝播関数 $\Delta'_{F,ij}(p)$† の $p=0$ での逆行列である。したがって，(20) は，ベクトル $(T^A v)_j$ が (零ベクトルでない限り)，行列 $\Delta'^{-1}_F(0)$ の固有値 0 に属する固有ベクトルであることを示している。$\Delta'^{-1}_F(0)$ の零固有値は，その固有ベクトル方向の場が零質量を持つことを意味するから，結局 (20) は，独立な固有ベクトル $T^A v$ の数だけ，零質量 NG 粒子が現れることを示している。独立な $T^A v(\neq 0)$ の個数は，独立な破れた生成子 $T^A \in \mathcal{G} - \mathcal{H}$ の数であり，**6-1** (31) で与えた $\dim G - \dim H$ に一致する。(証明終)

南部-Jona-Lasinio 模型　次に，より自明でない例として，**1-5** (39) で名前を紹介した南部-Jona-Lasinio (NJ) 模型を考えよう：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{G}{N} [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \psi)^2]. \tag{23}$$

ただし，ここでは，以下の近似の意味を明確にするため，フェルミオン場 ψ を N 個の Dirac 場 ψ_i の $SU(N)$ 列ベクトルとみなす。すなわち

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}, \qquad \bar{\psi} \Gamma \psi \equiv \sum_{i=1}^{N} \bar{\psi}_i \Gamma \psi_i. \tag{24}$$

もともとの NJ 模型 **1-5** (39) は $N=1$ に相当する。

---

† $\Delta'_{F,ij}(p) \equiv \int d^4x \, e^{ipx} i \langle 0 | \mathrm{T} \, \phi_i(x) \phi_j(0) | 0 \rangle$ が定義。

この系 (23) は，位相変換 $\psi(x) \to e^{i\theta}\psi(x)$ の不変性以外に，カイラル $U(1)$ 変換

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\gamma_5\theta}\psi(x) \tag{25}$$

の下での不変性を持ち，そのため (23) には ψ の質量項が現れていない。今から，このカイラル $U(1)$ 対称性がこの系のダイナミクスにより自発的に破れて ψ が質量を獲得する可能性を調べる。(23) の 4-Fermi 相互作用項 $(G/N)(\bar{\psi}\psi)^2$ の形を考慮すれば，もし複合場 $\bar{\psi}\psi(x)$ が 0 でない真空期待値 $\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle = -(N/2G)m \neq 0$ を実現したら，ψ が $-m\bar{\psi}\psi$ なる質量項を得ると期待される。このとき，**1-5** (30) のカイラル・カレント $j_{5\mu} = -\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ と，**1-5** (41) の $\bar{\psi}\psi$, $\bar{\psi}i\gamma_5\psi$ の変換則より，

$$[iQ_5, \bar{\psi}i\gamma_5\psi(x)] = \int d^3y\, i[j_{50}(y), \bar{\psi}i\gamma_5\psi(x)] = -2\bar{\psi}\psi(x) \tag{26}$$

が従うから，右辺の真空期待値 $\neq 0$ は，確かに，カイラル電荷 Q_5 の対称性の自発的破れを意味し，擬スカラー複合場 $\bar{\psi}i\gamma_5\psi(x)$ のチャネルに擬スカラー NG ボソンが現れることを意味する。この NG ボソンは，(23) の Lagrangian 中には "素" Heisenberg 場として用意されていないから，ダイナミカルに結合状態 (bound state) として供給されねばならない。

この問題を扱うために，補助場の方法 (auxiliary field method) と呼ばれる技巧を用いる。(23) の系の生成汎関数は

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp i\int d^4x [\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \eta\bar{\psi}] \tag{27}$$

で与えられるが，これに次の Gauss 積分 $=1$ の因子

$$1 = \int \mathcal{D}\sigma' \mathcal{D}\pi' \exp i\int d^4x \left[-\frac{N}{2\lambda}\Big(\sigma'(x)^2 + \pi'(x)^2\Big)\right] \tag{28}$$

を掛けても，もちろんかまわない。ここで，積分変数 $\sigma'(x), \pi'(x)$ を

$$\sigma' = \sigma + \frac{\lambda}{N}\bar{\psi}\psi, \qquad \pi' = \pi + \frac{\lambda}{N}\bar{\psi}i\gamma_5\psi \tag{29}$$

のように σ, π へ変数変換しても積分測度は不変，$\mathcal{D}\sigma'\mathcal{D}\pi' = \mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\pi$，だから

$$\begin{aligned} &Z[\eta, \bar{\eta}] \\ &\quad = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi \exp i\int d^4x [\mathcal{L}_Y(\psi, \bar{\psi}, \sigma, \pi) + \bar{\eta}\psi + \eta\bar{\psi}], \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y &= \mathcal{L} - \frac{N}{2\lambda}\left[\Big(\sigma + \frac{\lambda}{N}\bar{\psi}\psi\Big)^2 + \Big(\pi + \frac{\lambda}{N}\bar{\psi}i\gamma_5\psi\Big)^2\right] \\ &= \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{N}{2\lambda}(\sigma^2 + \pi^2) - \bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\pi)\psi, \end{aligned} \tag{31}$$

を得る。ただし，ここで(23)の $\mathcal{L}$ の中の 4-Fermi 相互作用項をちょうど相殺するように，(28)のパラメータ λ を

$$\lambda=2G \tag{32}$$

と選んだ。すなわち，(31)の Lagrangian $\mathcal{L}_Y$ では，もとの 4-Fermi 相互作用項が，湯川型相互作用項 $-\bar{\psi}\psi\sigma$ や $\bar{\psi}i\gamma_5\psi\pi$ に置き換えられたのである。ここで導入した“場” $\sigma(x), \pi(x)$ を補助場，(23)の $\mathcal{L}$ を(31)の $\mathcal{L}_Y$ に書き換えるトリックを補助場の方法と呼ぶ。上の導出から，$\mathcal{L}$ の系と $\mathcal{L}_Y$ の系が物理的に等価なのは明らかであるが，経路積分によらなくても，(31)の $\mathcal{L}_Y$ で補助場 σ, π は運動項を持たないから，その運動方程式

$$\sigma=-(\lambda/N)\,\bar{\psi}\psi, \qquad \pi=-(\lambda/N)\,\bar{\psi}i\gamma_5\psi \tag{33}$$

を使って $\mathcal{L}_Y$ に代入して消去すれば，明らかに $\mathcal{L}_Y$ はもとの $\mathcal{L}$ に帰着し等価であることがわかる。また(33)から，補助場 σ と π は，複合場 $\bar{\psi}\psi$ と $\bar{\psi}i\gamma_5\psi$ の代用をする場であることが理解される。$\mathcal{L}_Y$ 系ももちろんカイラル $U(1)$ 対称性を持つ：この場合のカイラル変換は，$\psi(x)$ はもとの(25)で，補助場 $(\sigma(x), \pi(x))$ の方は，(33)からも明らかなように，$(\bar{\psi}\psi(x), \bar{\psi}i\gamma_5\psi(x))$ と同じく2成分ベクトルとして角度 2θ の回転，**1-5** (42)で与えられる。

さて，(31)の $-\bar{\psi}\sigma\psi$ 項より，$\sigma=-(\lambda/N)\bar{\psi}\psi$ が真空凝縮(condensation；0でない真空期待値を得ること)を起こせば，ψ が $\langle 0|\sigma|0\rangle$ の質量を得，カイラル対称性を破ることがわかる。それゆえ，ここでは，σ, π の場の振舞いにのみ興味があるので，(30)の生成汎関数で $\eta=\bar{\eta}=0$ としてフェルミオン場についての積分を先にやってしまおう。$\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}$ 積分は Gauss 積分であるから，**4-4** (27)の公式を用いて，

$$Z=\int\mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\pi\exp iNS_B[\sigma,\pi] \tag{34}$$

$$NS_B[\sigma,\pi]=N\left\{\int d^4x\left[-\frac{1}{2\lambda}(\sigma^2+\pi^2)\right]-i\ln\mathrm{Det}\left[i\partial\!\!\!/-(\sigma+i\gamma_5\pi)\right]\right\} \tag{35}$$

を得る。フェルミオンが N 成分あったから $\ln(\mathrm{Det})^N=N\ln(\mathrm{Det})$ となり，N の因子がくくり出せたことに注意しよう。この時点で，N は作用積分全体に掛かっている，$1/\hbar$ と同様な因子となるので，**4-5** の最後に説明したように，(35)の作用で記述される σ, π 系のループ展開は $1/N$ 展開と同じものとなる。したがって，(35)の系の有効作用を $N\Gamma[\sigma,\pi]$ と書けば

$$\Gamma[\sigma,\pi]=S_B[\sigma,\pi]+O(1/N) \tag{36}$$

となり，S_B は (35) の "古典的" 作用，$O(1/N)$ は 1 ループ以上のグラフの寄与である。ここではもっぱら $1/N$ 展開の最初のオーダーだけを議論することにし，(36) に対応する有効ポテンシャル $V(\sigma,\pi)=S_B[\sigma(x)=\sigma,\ \pi(x)=\pi]\Big/\int d^4x$ は，**4-5** (50)～(52) で用いた手法を使って

$$V(\sigma,\pi)=\frac{1}{2\lambda}(\sigma^2+\pi^2)-\int\frac{d^4k}{i(2\pi)^4}\ln\det[\not{k}-(\sigma+i\gamma_5\pi)] \tag{37}$$

となる。ここの det は一つの Dirac 場に対する 4×4 行列の行列式である。$\det(e^{-i\gamma_5\theta})=e^{-i\theta\,\mathrm{tr}(\gamma_5)}=1$ を用いて，$\tan 2\theta=\pi/\sigma$ とすれば，

$$\begin{aligned}\det[\not{k}-(\sigma+i\gamma_5\pi)]&=\det\{e^{-i\gamma_5\theta}[\not{k}-(\sigma+i\gamma_5\pi)]e^{-i\gamma_5\theta}\}\\&=\det[\not{k}-\sigma'],\qquad \sigma'\equiv\sqrt{\sigma^2+\pi^2}\end{aligned} \tag{38}$$

とできる。さらに，一般に $\int d^4k\,f(k)=\int d^4k\,f(-k)$ だから，(37) で

$$\begin{aligned}\ln\det(\not{k}-\sigma')\ \longrightarrow\ &(1/2)[\ln\det(\not{k}-\sigma')+\ln\det(-\not{k}-\sigma')]\\&=(1/2)\ln\det(\sigma'^2-k^2)=2\ln(\sigma^2+\pi^2-k^2)\end{aligned} \tag{39}$$

の置き換えができることに注意すれば，$V(\sigma,\pi)$ は

$$V(\sigma,\pi)=\frac{1}{2\lambda}(\sigma^2+\pi^2)-2\int\frac{d^4k}{i(2\pi)^4}\ln(\sigma^2+\pi^2-k^2-i\epsilon) \tag{40}$$

となる。

最後の 4 次元積分は，紫外部で発散しており，このままではうまく定義されていない。そこで，運動量を Euclid 化したところで紫外部を切断する，切断理論 (cut-off theory) としてこの模型を定義することにする：すなわち，Euclid 化運動量を $k_E^\mu\equiv(k^1,k^2,k^3,k^4=k^0/i)$ として†

$$\int\frac{d^4k}{i}f(-k^2)\ \longrightarrow\ \int_{k_E^2\leqq\Lambda^2}d^4k_E\,f(k_E^2)=\int_0^{\Lambda^2}\pi^2k_E^2\,dk_E^2\,f(k_E^2) \tag{41}$$

で (40) の積分を定義する。Λ^2 を切断パラメータと呼ぶ。そうすれば，(40) の積分は初等的に遂行できて

$$\begin{aligned}V(\sigma,\pi)=V(\sigma=\pi=0)&+\frac{1}{2\lambda}(\sigma^2+\pi^2)\\&-\frac{1}{16\pi^2}\left\{\Lambda^4\ln\left(1+\frac{\sigma'^2}{\Lambda^2}\right)-\sigma'^4\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{\sigma'^2}\right)+\sigma'^2\Lambda^2\right\}\end{aligned} \tag{42}$$

($\sigma'^2\equiv\sigma^2+\pi^2$) となる。

---

† $k^4=ik^0$ ではなく $k^4=k^0/i$ であるのは，(40) の被積分関数が遠方で充分速く落ちる場合には，$k_0=\pm\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\sigma^2+\pi^2}\mp i\epsilon$ の特異性を避ける方向に k_0 複素平面上で積分経路を回転するということで一意的に決まる。

この有効ポテンシャル V は，カイラル対称性を反映して，明らかに (σ, π) 平面で回転対称である。V を $\pi=0$ の断面で見れば，

$$V(\sigma,\pi=0)-V(0,0)\simeq\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2\lambda}-\dfrac{\Lambda^2}{8\pi^2}\right)\sigma^2 & \sigma^2\ll\Lambda^2\\[2ex] \dfrac{1}{2\lambda}\sigma^2 & \sigma^2\gg\Lambda^2\end{cases}\tag{43}$$

と振舞うから，$1/2\lambda \gtrless \Lambda^2/8\pi^2$ の場合に応じて，6・2 図 (a),(b) に示した形をとる。したがって，結合定数 $\lambda=2G$ が小さくて $1/\lambda\geq\Lambda^2/(4\pi^2)$ となっている間は，V の停留点は原点 $\sigma=\pi=0$ しかなくカイラル対称性は破れないが，λ が大きくなって $1/\lambda<\Lambda^2/(4\pi^2)$ となると，原点よりもエネルギーの低い停留点 (再びワイン瓶の底の円周) が現れカイラル対称性が自発的に破れることになる。この自発的破れが起こる最小の結合定数を臨界結合定数 (critical coupling constant) と呼び，今の場合

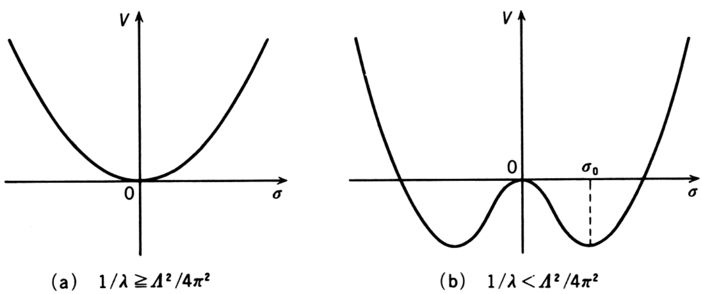
$$\lambda_{\rm cr}=\frac{4\pi^2}{\Lambda^2}\tag{44}$$

で与えられる。$\lambda>\lambda_{\rm cr}$ で対称性が自発的に破れる場合，真空を $\pi=0$ 断面のものをとることにすれば，σ の期待値 $\langle 0|\sigma(x)|0\rangle=\sigma_0$ は，(42) の停留性条件より

$$\left.\frac{\partial V(\sigma,\pi=0)}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_0}=\frac{\sigma_0}{\lambda}-\frac{\sigma_0}{4\pi^2}\left[\Lambda^2-\sigma_0^2\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{\sigma_0^2}\right)\right]=0\tag{45}$$

で決まる。これは，対称性の破れていないノーマル解 (normal solution) $\sigma_0=0$ 以外に，$\lambda>\lambda_{\rm cr}$ では対称性の自発的に破れた，

$$\frac{4\pi^2}{\lambda\Lambda^2}=1-\frac{\sigma_0^2}{\Lambda^2}\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{\sigma_0^2}\right)\tag{46}$$



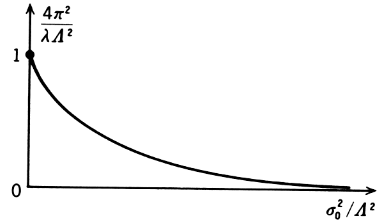
6・2 図 (42) のポテンシャル $V(\sigma,\pi=0)-V(0,0)$

で決まるスーパー(または超伝導)解(super solution)を持つ。実際，(46)の右辺は6·3図に示すような σ_0^2/Λ^2 の単調減少関数で，λ が臨界結合定数 λ_{cr} に達すると $(4\pi^2/\lambda_{cr}\Lambda^2=1)$ 解が現れ始め，λ が λ_{cr} より大きくなるにつれて真空期待値 σ_0 は $\sigma_0=0$ から単調に増大する。

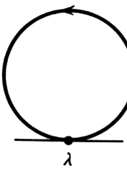
ちなみに停留性の条件(45)は，もちろん，V のもとの表式(37)を σ で微分した†

$$\sigma_0=\lambda\int^{\Lambda}\frac{d^4k}{i(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\left(\frac{1}{\sigma_0-\not{k}}\right) \tag{47}$$

と等価な方程式である。この右辺の量は，質量 $m=\sigma_0$ を持つフェルミオンが回る6·4図に示したループ・グラフに相当しており，(47)は，「フェルミオンが $m=\sigma_0$ の質量を得たとしたとき，$(\lambda/2N)(\bar{\psi}\psi)^2$ の相互作用項を通じて誘起される質量項がまた $m=\sigma_0$ であれ」という要求であり，南部-Jona-Lasinioの自己無撞着条件(self-consistency condition)と呼ばれる。



6·3 図 (46)右辺の関数



6·4 図

さて，上記の計算から $\lambda>\lambda_{cr}$ のときには，確かにダイナミカルにカイラル対称性が破れることを見出したのだが，それに対応する零質量NGボソンは果たして現れているだろうか。(26)の交換関係は，NG粒子が擬スカラー・チャネル $\pi\sim\bar{\psi}i\gamma_5\psi$ に現れるべきことを示しているので，擬スカラー補助場 $\pi(x)$ の2点関数を計算してみよう。

$1/N$ 展開の第0次近似での有効作用 Γ は(35)の S_B で与えられているから，2点頂点関数 $\tilde{\Gamma}_\pi^{(2)}(p)\cdot(2\pi)^4\delta^4(p+q)=[\delta^2\Gamma/\delta\pi(p)\,\delta\pi(q)]_{\substack{\sigma=\sigma_0\\ \pi=0}}$ は，$\ln\mathrm{Det}=\mathrm{Tr}\,\mathrm{Ln}$ を用いて

$$\tilde{\Gamma}_\pi^{(2)}(p)=-\frac{1}{\lambda}-\int\frac{d^4k}{i(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\left[(-i\gamma_5)\frac{1}{\sigma_0-\not{k}}(-i\gamma_5)\frac{1}{\sigma_0-(\not{k}+\not{p})}\right] \tag{48}$$

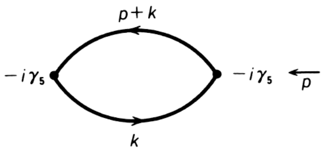
となる。右辺第2項は，6·5図で表したFeynmanグラフに対応し，付録

† (37)から(47)を得るには，行列 A に対する公式 $\ln\det A=\mathrm{tr}\ln A$ を用いる。

B, C の γ 行列トレース公式および Feynman パラメータ公式を用いて

$$\tilde{\Gamma}_\pi^{(2)}(p)=-\frac{1}{\lambda}+\int\frac{d^4k}{i(2\pi)^4}4(\sigma_0{}^2-k^2-k\cdot p)\int_0^1 dx\frac{1}{[\sigma_0{}^2-k^2-x(2k\cdot p+p^2)]^2}$$
$$=-\frac{1}{\lambda}+\int_0^1 dx\int^\Lambda\frac{d^4k}{i(2\pi)^4}\frac{4[\sigma_0{}^2-k^2+x(1-x)p^2]}{[\sigma_0{}^2-k^2-x(1-x)p^2]^2} \tag{49}$$

を得る。第 2 行へは，$k^\mu+xp^\mu$ を新たに k^μ とする変数変換を行い，分子の $k\cdot p$ 項は対称積分で 0 とした。(49) の表式で $p^\mu=0$ としたものは，明らかに自己無撞着条件の式 (47) に帰着し，0 となることがわかる。すなわち，2 点頂点関数 $\tilde{\Gamma}_\pi^{(2)}(p)$ は $p=0$ 近傍で



6·5 図

$$\tilde{\Gamma}_\pi^{(2)}(p)\,(=-\Delta'^{-1}_{F,\pi}(p))=0+cp^2+O(p^4)\qquad(c：定数) \tag{50}$$

と振舞い，場 π の伝播関数 $\Delta'_{F,\pi}(p)$ は零質量 pole を持つことが確かめられた。

(49) の積分は，(41) の Euclid 化の後，初等的に遂行することができる。ついでにスカラー補助場 $\sigma(x)$ の 2 点頂点関数 $\tilde{\Gamma}_\sigma^{(2)}(p)$——それは (48) の二つの頂点因子 $(-i\gamma_5)$ を (-1) に置き換えればよく，(49) の被積分関数の分子の $\sigma_0{}^2$ が $-\sigma_0{}^2$ となる——に対する積分結果も記せば，

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}_{\pi\,\text{または}\,\sigma}(p)=-\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{4\pi^2}\left\{\Lambda^2-\frac{1}{2}(2\sigma_0{}^2-\hat{p}^2)\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{\sigma_0{}^2}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\hat{p}^2}{2}\right)\frac{2\Lambda^2+4\sigma_0{}^2-p^2}{4\Lambda^2+4\sigma_0{}^2-p^2}B(p^2;\,\Lambda^2+\sigma_0{}^2)-\frac{\hat{p}^2}{2}B(p^2;\,\sigma_0{}^2)\right\}$$
$$\hat{p}^2\equiv\begin{cases}p^2 & \pi(x)\text{ の場合}\\ p^2-4\sigma_0{}^2 & \sigma(x)\text{ の場合}\end{cases} \tag{51}$$

$$B(p^2;\,M^2)\equiv\begin{cases}\sqrt{\dfrac{4M^2-p^2}{-p^2}}\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{4M^2-p^2}+\sqrt{-p^2}}{\sqrt{4M^2-p^2}-\sqrt{-p^2}}\right)=2\,\mathrm{arctanh}\sqrt{\dfrac{-p^2}{4M^2-p^2}}\right] & (-p^2\geqq 0)\\ \sqrt{\dfrac{4M^2-p^2}{p^2}}\,2\arctan\sqrt{\dfrac{p^2}{4M^2-p^2}} & (0\leqq p^2<4M^2)\end{cases} \tag{52}$$

となる。場 $\pi(x)$ のくりこみ定数 Z_π は，$\tilde{\Gamma}_\pi^{(2)}(p^2)=Z_\pi^{-1}p^2+O(p^4)$ で定義されるから，この結果 (51) より，$B(p^2=0\,;\,M^2)=2$ に注意して

$$Z_\pi^{-1}=\frac{1}{8\pi^2}\left[\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{\sigma_0{}^2}\right)-\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+\sigma_0{}^2}\right]=\int^\Lambda\frac{d^4k_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4}\frac{2}{(k_{\mathrm{E}}{}^2+\sigma_0{}^2)^2} \tag{53}$$

と求まる。場 π は，(31) の Lagrangian で $-\bar{\psi}i\gamma_5\psi\pi$ の相互作用項を持つから，くりこまれた NG ボソン場 $\pi_r \equiv Z_\pi^{-1/2}\pi$ のフェルミオン ψ への結合定数は

$$\mathcal{L}^{\text{int}}_{\pi\bar{\psi}\psi} \equiv -g_{\pi\bar{\psi}\psi}\,\bar{\psi}i\gamma_5\psi\,\pi_r\,; \quad g_{\pi\bar{\psi}\psi} = Z_\pi^{1/2} \tag{54}$$

で与えられる。この $g_{\pi\bar{\psi}\psi}$ がもとの基本的結合定数 $\lambda=2G$ に直接依存せず，$\langle 0|\sigma(x)|0\rangle=\sigma_0$ の値だけで決まっているのは興味深い。一方，NG ボソンの崩壊定数 f_π も，(33) より

$$\begin{aligned} \bar{\psi}i\gamma_5\psi(x) &= -\frac{N}{\lambda}\pi(x) \xrightarrow[x_0\to\pm\infty]{} -\frac{N}{\lambda}Z_\pi^{1/2}\pi_r^{\text{as}}(x) \\ \langle 0|-2\,\bar{\psi}\psi(x)|0\rangle &= 2\frac{N}{\lambda}\langle 0|\sigma(x)|0\rangle = 2\frac{N}{\lambda}\sigma_0 \end{aligned} \tag{55}$$

がわかるから，(26) の変換則と **6-1** (22),(23) の関係式から

$$f_\pi = \frac{2(N/\lambda)\,\sigma_0}{[-(N/\lambda)\,Z_\pi^{1/2}]} = -2\,\sigma_0 Z_\pi^{-1/2} \tag{56}$$

と求まる。

スカラー補助場 $\sigma(x)$ の $\tilde{\Gamma}_\sigma^{(2)}(p^2)$ に対する結果 (51) で注目に値するのは，$\hat{p}^2=p^2-4\sigma_0{}^2=0$ で，(45) により，$\Gamma_\sigma^{(2)}$ が 0 を持つことである。すなわち，スカラーチャンネルにも $m_\sigma^2=4\sigma_0{}^2$ の質量を持つ“結合状態”が生じている。しかし，$\sigma_0=m$ はフェルミオン ψ の質量だから，$p^2=4\sigma_0{}^2$ はちょうど ψ-$\bar{\psi}$ 2 フェルミオン状態のしきい値 (threshold) であるので，真の結合状態ではなく，共鳴状態である。

6-3 NG 粒子の低エネルギー定理

先に触れたように，NG 粒子の低エネルギー極限における散乱振幅は，対称性の要求から，力学系の詳細に全くよらずに決定され，これを一般に NG 粒子に対する低エネルギー定理 (low energy theorem) と呼ぶ。全く一般的に話をするとかなり複雑になるので，ここではごく簡単な例にとどめる。その代わり，低エネルギー定理の結果を手っとり早く見出す方法としての，非線形表現 Lagrangian の構成法を次節で一般的に述べる。

$U(n)_L\times U(n)_R$ カイラル対称性　前節の南部-Jona-Lasinio 模型 **6-3** (23) でフェルミオン場 ψ が，$1/N$ 展開の $SU(N)$ 添字 $i=1,\cdots,N$ 以外に，もう一つ別の添字 $f=1,\cdots,n$ を持って ψ_{if} となっていたとする。このと

き，i をカラー添字，f をフレーバー添字と呼べば，**5-1** (42) の QCD Lagrangian において，クォークの質量 m_f を皆 0 とした，零質量 QCD のクォーク場 ψ_{if} との類似が明らかになるだろう。このフレーバーが n 種ある，南部-Jona-Lasinio 模型でも，零質量 QCD でも，どちらでも，カイラル $U(n)_{\rm L}\times U(n)_{\rm R}$ 対称性を持っている†。すなわち，系は，フェルミオン ψ_f (カラー $SU(N)$ 添字 i は省略) の左手型成分 $\psi_{{\rm L},f}\equiv\left(\dfrac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi_f$，右手型成分 $\psi_{{\rm R},f}\equiv\left(\dfrac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi_f$ にそれぞれ別々の $U(n)$ 変換

$$
\begin{aligned}
\psi'_{{\rm L},f}(x)&=(\exp i\theta_{\rm L}^aT^a)_{ff'}\,\psi_{{\rm L},f'}(x), &\quad \exp i\theta_{\rm L}^aT^a&\in U(n)_{\rm L},\\
\psi'_{{\rm R},f}(x)&=(\exp i\theta_{\rm R}^aT^a)_{ff'}\,\psi_{{\rm R},f'}(x), &\quad \exp i\theta_{\rm R}^aT^a&\in U(n)_{\rm R},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

を行っても不変である。この変換の Noether カレント (の逆符号) は

$$
\begin{aligned}
j_{{\rm L},\mu}^a&=\bar\psi_f\,\gamma_\mu\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)(T^a)_{ff'}\,\psi_{f'},\\
j_{{\rm R},\mu}^a&=\bar\psi_f\,\gamma_\mu\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)(T^a)_{ff'}\,\psi_{f'}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

で与えられ，その電荷 $Q_{\rm L,R}^a(x_0)=\int d^3x\, j_{{\rm L,R},\mu=0}^a(x)$ とカレントは

$$
\begin{aligned}
[Q_{\rm L}^a(x_0),j_{{\rm L},\mu}^b(x)]&=if_{abc}\,j_{{\rm L},\mu}^c(x), &\quad [Q_{\rm L}^a(x_0),j_{{\rm R},\mu}^b(x)]&=0,\\
[Q_{\rm R}^a(x_0),j_{{\rm R},\mu}^b(x)]&=if_{abc}\,j_{{\rm R},\mu}^c(x), &\quad [Q_{\rm R}^a(x_0),j_{{\rm L},\mu}^b(x)]&=0,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

の同時刻交換関係を満たす。重要な点は，この電荷-カレントの交換関係は単に，カレント $(j_{{\rm L},\mu}^a(x), j_{{\rm R},\mu}^a(x))$ が，カイラル $U(n)_{\rm L}\times U(n)_{\rm R}$ 変換の下で，その随伴表現に属するという性質を言っているだけで，$U(n)_{\rm L}\times U(n)_{\rm R}$ のカイラル対称性を持つ系では**常に成り立つ**，ということである。以下で必要なのは，実は (3) のみであり，したがって，上で例にあげた南部-Jona-Lasinio 模型や零質量 QCD である必要も，カレントが (2) のような具体的な形をとる必要もない。

(3) のカレントを組み換えて，ベクトルおよび軸性ベクトル・カレント $V_\mu^a\equiv j_{{\rm R},\mu}^a+j_{{\rm L},\mu}^a$，$A_\mu^a\equiv j_{{\rm R},\mu}^a-j_{{\rm L},\mu}^a$ を定義し，対応する電荷を

$$
Q^a=Q_{\rm R}^a(x_0)+Q_{\rm L}^a(x_0),\qquad Q_5^a(x_0)=Q_{\rm R}^a(x_0)-Q_{\rm L}^a(x_0)
\tag{4}
$$

と記す。そうすれば，(3) の交換関係は，等価に，

---

† 実は，量子論的にはアノマリー (量子異常) と呼ばれる現象があり，$U(1)_{\rm A}$ 対称性が壊れ，$SU(n)_{\rm L}\times SU(n)_{\rm R}\times U(1)_{\rm V}$ しか対称性がなくなる。しかしこの節ではこれを無視する。

$$[Q^a, V^b_\mu(x)]=if_{abc}V^c_\mu(x), \quad [Q^a, A^b_\mu(x)]=if_{abc}A^c_\mu(x), \tag{5}$$
$$[Q^a_5, V^b_\mu(x)]=if_{abc}A^c_\mu(x), \quad [Q^a_5, A^b_\mu(x)]=if_{abc}V^c_\mu(x), \tag{6}$$

と書き直される。今から考察するのは，軸性電荷 (axial charge) Q^a_5 の対称性がすべて自発的に破れ，ベクトル・カレントの電荷 Q^a の対称性 ($U(n)_V$ 群をなす) のみが残る場合，すなわち $G=U(n)_L\times U(n)_R$ が自発的に $H=U(n)_V$ まで破れる場合である。この場合，Q^a_5 の破れに対応して現れる n^2 個の NG ボソン π^a は擬スカラー粒子で，残っている対称性 $U(n)_V$ の随伴表現に属し，しばしば π 粒子 (pion) と呼ばれる。[現実の π 中間子 $\pi^\pm, \pi^0$ は，近似的なカイラル $SU(2)_L\times SU(2)_R$ 対称性の Q^a_5 の破れに対応する $SU(2)_V$ 3 重項 (アイソ・ベクトル) NG ボソンとみなされる。]

Goldberger-Treiman 関係式　今，考えている力学系に，$H=U(n)_V$ の基本表現 $\boldsymbol{n}$ に属するスピン 1/2 フェルミオンが，結合状態なり何なりで，存在しているとし，それを核子 (nucleon)N と呼ぶ。一つの核子が一つの軟(低エネルギー) NG ボソン $\pi^a(q)$ を放出する過程に対応して，軸性カレント $A^a_\mu(x)$ を運動量 p^μ_i と p^μ_f の核子状態ではさんだ行列要素

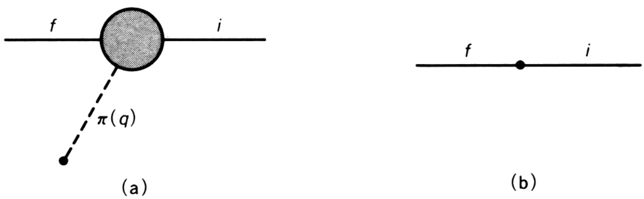
$$\langle N(p_f)|A^a_\mu(x)|N(p_i)\rangle=M^a_\mu(q)e^{-iqx}, \quad q\equiv p_i-p_f \tag{7}$$

を考える。$|N(p)\rangle$ は，4-6(19) の不変規格化をした状態とする。Lorentz 不変性，$U(n)_V$ 対称性，および $\mathcal{P}$, $\mathcal{CP}$ (または $\mathcal{T}$) 不変性の仮定より，$M^a_\mu(q)$ は

$$M^a_\mu(q)=\bar{u}(p_f)T^a[\gamma_\mu\gamma_5 g_A(q^2)+q_\mu\gamma_5 h_A(q^2)]u(p_i) \tag{8}$$

の形をとる (演習問題 6.3)。ただし，$u(p)$ は核子 $|N(p)\rangle$ の Dirac スピノール波動関数 $u(\boldsymbol{p}, s)$ と $U(n)_V$ スピノール波動関数 χ の積で，T^a は $U(n)_V$ の生成子の基本表現における表現行列である。

さて，$M^a_\mu(q)$ に効く "Feynman グラフ" を，6·6 図 (a), (b) に示すように，概念的に二つのカテゴリーに分けることができる：(a) 一つは，軸性カレント A^a_μ (6·6 図では黒丸 • で表示) が放出された NG ボソン線の端点



6·6 図

に付くもの，(b) もう一つは，A_μ^a が核子線に付くもの，である。この両者の分離は，NG ボソンの質量殻 $q^2=0$ を離れたところでは，NG ボソンに対応する“複合” Heisenberg 場をどうとるかに依存するので明確ではないが，ここではおおむね，(8) の形状因子 $g_A(q^2)$ の部分が 6·6 図 (b) に，$h_A(q^2)$ の部分が (a) に対応していると考えて充分である。実際，6·6 図 (a) のグラフは，NG ボソン pole $q^2=0$ 近傍で，

$$\text{6·6 図 (a)} \simeq \langle 0|A_\mu^a(x)|\pi^b(q)\rangle \frac{1}{-q^2} G_{fi}^{\pi^b}(q) \tag{9}$$

と書け，$G_{fi}^{\pi^b}(q)$ は図の ● 部に対応し NG ボソンの核子との結合定数 $g_{\pi NN}$ (**6-2** (54) 参照) を用いて

$$G_{fi}^{\pi^b}(q) = -g_{\pi NN}\,\bar{u}(p_f)T^b i\gamma_5 u(p_i) \tag{10}$$

と表され，一方，NG ボソンの崩壊定数 f_π の定義 **6-1** (28) より†

$$\begin{aligned}\langle 0|A_\mu^a(x)|\pi^b(q)\rangle &= \langle 0|f_\pi\,\partial_\mu\,\pi^{\mathrm{as},a}(x)|\pi^b(q)\rangle \\ &= -if_\pi\,\delta^{ab}\,q_\mu\,e^{-iqx}\end{aligned} \tag{11}$$

となるから，結局

$$\text{6·6 図 (a)} \simeq f_\pi\,g_{\pi NN}\,\bar{u}(p_f)T^a\gamma_5(q_\mu/q^2)u(p_i)e^{-iqx} \tag{12}$$

を得る。すなわち，確かに 6·6 図 (a) の NG pole グラフは (8) の $h_A(q^2)$ に

$$h_A(q^2) \simeq f_\pi\,g_{\pi NN}/q^2 \tag{13}$$

の寄与を与える。

カイラル対称性の存在により，軸性カレント A_μ^a が保存せねばならないが，この要請 $\partial^\mu A_\mu^a=0$ は，(7) に ∂^μ を演算して

$$\begin{aligned}0 = q^\mu M_\mu^a(q) &= \bar{u}(p_f)T^a[\not{q}\gamma_5 g_A(q^2) + q^2\gamma_5 h_A(q^2)]u(p_i) \\ &= \bar{u}(p_f)T^a\gamma_5[-2m_N\,g_A(q^2) + q^2 h_A(q^2)]u(p_i)\end{aligned} \tag{14}$$

を導く。m_N は核子の質量である。すなわち，等式

$$2m_N\,g_A(q^2) = q^2 h_A(q^2) \tag{15}$$

が得られる。特に，$q^2=0$ では，$h_A(q^2)$ の NG pole 項 (13) のみが効くから

$$g_{\pi NN} = 2m_N\,g_A(q^2=0)/f_\pi \tag{16}$$

が結論される。NG ボソンと核子の結合定数 $g_{\pi NN}$ を，核子の質量 m_N と軸性電荷 $g_A(q^2=0)$ (と f_π) で与えるこの等式は Goldberger (ゴールドバーガー)-Treiman (トライマン) 関係式と呼ばれ，低エネルギー定理の最も簡単な例である。

---

† この節でのカレントは，Noether current と逆符号にとっているので，(11) で定義される f_π は，この節以外でいう f_π とは逆符号になっていることに注意しておこう。

軟 NG ボソン 2 体過程　任意の数の軟 NG ボソンの関与する過程に対しても低エネルギー定理を導くことができる。その方法を例示するため，ここでは，また最も簡単な場合，核子と軟 NG ボソンの弾性散乱 $N(p_i)+\pi^a(q) \to N(p_f)+\pi^b(k)$ の S 波部分を考える。関係する行列要素は

$$\langle N(p_f)|\mathrm{T}\,A_\mu^a(x)\,A_\nu^b(y)|N(p_i)\rangle \tag{17}$$

である。これに $\partial_x^\mu\partial_y^\nu$ を演算し，軸性カレント保存則を使えば

$$\begin{aligned}\partial_x^\mu\partial_y^\nu&\langle N(p_f)|\mathrm{T}\,A_\mu^a(x)A_\nu^b(y)|N(p_i)\rangle\\ &=\frac{1}{2}\Big\{\partial_x^\mu[\delta(x_0-y_0)\langle N(p_f)|[A_0^b(y),A_\mu^a(x)]|N(p_i)\rangle]\\ &\qquad+\partial_y^\nu[\delta(x_0-y_0)\langle N(p_f)|[A_0^a(x),A_\nu^b(y)]|N(p_i)\rangle]\Big\}\end{aligned} \tag{18}$$

を得る。さらに，この両辺に $\int d^4x\,e^{-iqx}\int d^4y\,e^{iky}$ を施し，q,k を相対的に同じオーダーに保ったまま $q,k\to 0$ の極限をとる。そうすれば，

$$\begin{aligned}\lim_{q,k\to 0}&\int d^4x\;e^{-iqx}\int d^4y\;e^{iky}\,q^\mu k^\nu\langle N(p_f)|\mathrm{T}\,A_\mu^a(x)\,A_\nu^b(y)|N(p_i)\rangle\\ &=\frac{1}{2}\Big\{iq^\mu\langle N(p_f)|\int d^4x\,[Q_5^b(x_0),A_\mu^a(x)]|N(p_i)\rangle\\ &\qquad-ik^\nu\langle N(p_f)|\int d^4y\,[Q_5^a(y_0),A_\nu^b(y)]|N(p_i)\rangle\Big\}+O(q\cdot k).\end{aligned} \tag{19}$$

ここで $O(q\cdot k)$ は，$q\cdot k\sim q^2\sim k^2$ 程度の q,k について 2 次以上の項を表す。

(19) 右辺の評価は簡単である。軸性電荷-軸性カレントの交換関係 (6)，および，ベクトル・カレント $V_\mu^c(x)$ の核子での行列要素が，Lorentz 不変性，$U(n)_\mathrm{V}$ 対称性，保存則 $\partial^\mu V_\mu^c=0$，の要請から一般に

$$\begin{aligned}&\langle N(p_f)|\,V_\mu^c(x)|N(p_i)\rangle\\ &\quad=\bar{u}(p_f)T^c[\gamma_\mu F_1(p^2)+i\sigma_{\mu\nu}p^\nu F_2(p^2)/2m_N]u(p_i)e^{ipx}\end{aligned} \tag{20}$$

$$p\equiv p_f-p_i,\qquad F_1(p^2=0)=1 \tag{21}$$

の形をとることを，使って，

$$\begin{aligned}(19)\,\text{右辺}&=i(2\pi)^4\delta^4(p_f+k-p_i-q)\\ &\quad\times\Big[\frac{1}{2}if_{abc}\,\bar{u}(p_f)T^c(\not{q}+\not{k})u(p_i)+O(q\cdot k)\Big]\end{aligned} \tag{22}$$

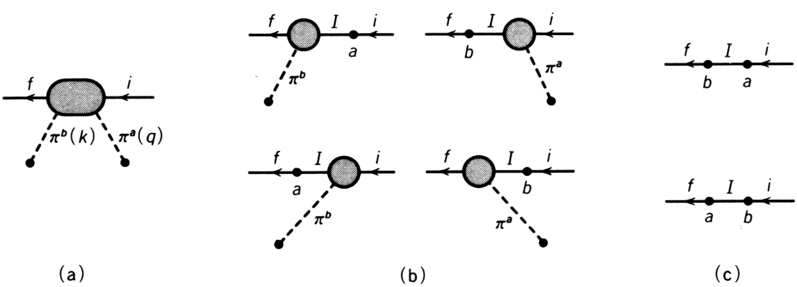
を得る。ここで (21) の $F_1(p^2=0)=1$ を使ったが，この事実は，(20) の $\mu=0$ 成分を $\int d^3x$ 積分したとき，右辺は $\delta^3(\boldsymbol{p})$ が出て $p^\mu=0$ となり第 1 項のみが残ること，他方左辺は $\int d^3x\ V_0^c(x)$ が $U(n)_\mathrm{V}$ 電荷 Q^c となり，Q_c の

下では $U(n)_V$ 基本表現の核子状態はもちろん行列 T^c で線形変換を受けるだけであること，から従う。

(19) 左辺の行列要素に寄与する "Feynman グラフ" のうち，軟運動量極限 $q, k \to 0$ で特異性 (singularity) を持ち最も効くグラフは，上の NG ボソン 1 体過程のときの 6·6 図と同じ描き方で，6·7 図 (a), (b), (c) の 3 タイプに分類される。(a) のグラフは NG ボソン pole $1/k^2, 1/q^2$ の特異性が明らかだが，(b), (c) のタイプのグラフの I と記した核子 1 粒子中間状態の伝播関数も，p_i, p_f が質量殻 $p_i{}^2 = p_f{}^2 = m_N{}^2$ 上の運動量なので，例えば

$$[m_N{}^2 - (p_i + q)^2]^{-1} = [-2p_i \cdot q + O(q^2)]^{-1} \tag{23}$$

の特異性を持つことに注意しておこう。



6·7 図　$q, k \to 0$ 極限で (19) 左辺に最も効くグラフ

6·7 図 (a) のグラフは，先ほどの 6·6 図 (a) の評価 (9) ～ (12) と同様にして，望みの NG ボソンの核子標的弾性散乱の不変振幅を与えることがわかる：

$$(19)\text{ 左辺}|_{6\cdot7\text{図(a)}} = -f_\pi{}^2 \mathfrak{M}(N(p_i) + \pi^a(q) \to N(p_f) + \pi^b(k)) \times i(2\pi)^4 \delta^4(p_f + k - p_i - q). \tag{24}$$

6·7 図 (b) と (c) のグラフは，実は，S 波 πN 散乱振幅には $O(q \cdot k)$ の寄与しか与えず，考えているオーダーでは落とせることが次のようにわかる。まず，6·7 図 (b), (c) は，先の 6·6 図 (a), (b) と同じグラフを部分グラフとして含んでいることに注意し，しかも 6·6 図 (a) と (b) のグラフの和は，q^μ (すなわち発散 ∂^μ) を掛け $q \to 0$ とすれば相殺して 0 になったことを思い出そう。それゆえ，6·7 図 (b), (c) のグラフの寄与をそれぞれ B, C と呼べば $B + 2C = O(q \cdot k)$ がわかり，$B + C$ の代わりに $-C$ を評価すればよい。しかし，この 6·7 図 (c) の例えば上のグラフの寄与 C は

$$C \propto \bar{u}(p_f) \not{k} \gamma_5 \frac{m+\not{p}_i+\not{q}}{-2p_i \cdot q} \not{q} \gamma_5 u(p_i) \tag{25}$$

の形をしており，これを $O(q \cdot k)$ の量を無視し，Dirac スピノール $u(p)$ の標準表示での形 (付録 B 参照)

$$u(p) = \begin{pmatrix} (p_0+m)^{1/2} \chi \\ (p_0+m)^{-1/2} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \chi \end{pmatrix} \qquad (\chi : 2\text{ 成分スピノール}) \tag{26}$$

を用いて重心系 ($\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}_f+\boldsymbol{k}=0$) であらわに評価してみれば，$\chi_f^\dagger \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} \chi_i$ や $\chi_f^\dagger \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \chi_i$ の形をした P 波散乱振幅に効く項しか出てこないことがわかる。

したがって，S 波散乱振幅に関しては，(24) と (22) を等置して，重心系で次の関係式

$$\begin{aligned} &\mathfrak{M}(N_i(p_i)+\pi^a(q) \to N_f(p_f)+\pi^b(k))|_{\text{S波}} \\ &\qquad = -(i/f_\pi^2) f_{abc} (T^c)_{fi} 2m_N q + O(q^2) \end{aligned} \tag{27}$$

を得る。 ただし， $q_0=k_0=|\boldsymbol{q}|=|\boldsymbol{k}|=|\boldsymbol{p}_i|=|\boldsymbol{p}_f|\equiv q$，$\bar{u}\gamma_0 u=2p_0 \simeq 2m_N$ を用い，(22) の中で $\boldsymbol{q}$ や $\boldsymbol{k}$ の方向に依存する項は S 波に効かずすべて落とした。関係式 (27) が S 波 πN 散乱振幅に対する望みの低エネルギー定理である。

せっかくここまでやったついでに，上の標的粒子を核子の代わりに NG ボソン自身をとった過程 $\pi^i(p_i)+\pi^a(q) \to \pi^f(p_f)+\pi^b(k)$ を考えておこう。この場合も，(19) 左辺に 6・7 図 (b),(c) は効かない。理由は核子標的の場合より簡単で，NG ボソン π が擬スカラーだから，パリティ保存から，3π 頂点や $\langle \pi | A_\mu | \pi \rangle$ は 0 となるからである。(19) 右辺に関しては，(20) の代わりに

$$\langle \pi^f(p_f) | V_\mu^c(x) | \pi^i(p_i) \rangle = i f_{fci} (p_i+p_f)_\mu f(p^2) e^{-ipx}, \qquad f(0)=1 \tag{28}$$

となることを用いる。そうすれば，(19),(24) よりただちに

$$\begin{aligned} &\lim_{q,k\to 0} \mathfrak{M}(\pi^i(p_i)+\pi^a(q) \to \pi^f(p_f)+\pi^b(k)) \\ &\qquad = -(1/f_\pi^2) \frac{1}{2} (i f_{abc})(i f_{fci})(k+q) \cdot (p_i+p_f) \\ &\qquad = (1/2f_\pi^2)(s-u) f_{ifc} f_{cab} \end{aligned} \tag{29}$$

を得る。ここで，質量殻上条件 $p_i^2=p_f^2=q^2=k^2=0$ および不変量

$$\begin{aligned} s &\equiv (p_i+q)^2 = 2p_i \cdot q = 2k \cdot p_f, \\ t &\equiv (p_i-p_f)^2 = -2p_i \cdot p_f = -2k \cdot q, \\ u &\equiv (p_i-k)^2 = -2k \cdot p_i = -2q \cdot p_f, \end{aligned} \tag{30}$$

を用いた。我々の p_i, p_f を有限にとどめておいて，q, k だけを 0 にする非対称な極限操作では，$t=-(s+u)=O(k\cdot q)$ は無視されたことに注意しよう。しかしながら，この場合，標的粒子も同じ NG 粒子だから，四つの NG ボソン $\pi^a, \pi^b, \pi^i, \pi^f$ の間の Bose 対称性が成立しなければならず，この要請から，(29) の振幅は一意的に次の対称な低エネルギー振幅に導く：

$$\mathfrak{M}(\pi^i(p_i)+\pi^a(q) \to \pi^f(p_f)+\pi^b(k))$$
$$=(1/3f_\pi^2)[(s-u)f_{ifc}f_{cab}+(u-t)f_{iac}f_{cbf}+(t-s)f_{ibc}f_{cfa}]$$
$$+O(s^2, st, \cdots). \tag{31}$$

実際，$t=-(s+u)=0$ のとき，(31) が (29) に帰着することは，構造定数 f_{abc} の Jacobi 恒等式 **5-1** (12) を使って確かめることができる。

6-4 非線形表現

次に，一般的に，対称性が G から H へ自発的に破れた場合に，NG ボソンが自分自身と，あるいは他の物質場と，どういう相互作用をし得るのかを，対称性の要求から決める一方法として非線形表現 Lagrangian を構成する方法を述べる。この Lagrangian において，NG ボソン場の微分の次数が最も低い項は，任意パラメータなしに一意的に決まるという事情があり，前節に述べた低エネルギー定理に対応するのである。

NG ボソン非線形 Lagrangian　今，対称性が群 G から部分群 H へ破れた場合に，G の生成子 T^A の全体を，破れていない生成子 $S^\alpha\in\mathcal{H}$ と，破れた生成子 $X^a\in\mathcal{G}-\mathcal{H}$ とに，**6-1** (9), (10) で述べたように，分離する：

$$\{T^A\in\mathcal{G}\}=\{S^\alpha\in\mathcal{H},\ X^a\in\mathcal{G}-\mathcal{H}\}, \tag{1}$$
$$\mathrm{tr}(S^\alpha X^a)=0. \tag{2}$$

ただし，ここで，T^A, S^α, X^a は，一番簡単な**基本表現**における生成子の表現行列 (hermite) と理解しておく。基本表現以外の表現 ρ の場合の表現行列は区別して $\rho(T^A), \rho(S^\alpha)$ などと表すことにする。さらに規格化を

$$\mathrm{tr}(S^\alpha S^\beta)=\frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta},\qquad \mathrm{tr}(X^a X^b)=\frac{1}{2}\delta^{ab}, \tag{3}$$

にとっておく。(2) の直交性は，$\mathrm{tr}(S^\alpha[S^\beta, X^a])=\mathrm{tr}([S^\alpha, S^\beta]X^a)=0$ を意味するので，$[S^\alpha, X^a]$ は常に $\mathcal{G}-\mathcal{H}$ に属することになる：

$$[\mathcal{H},\ \mathcal{G}-\mathcal{H}]\subset\mathcal{G}-\mathcal{H}. \tag{4}$$

破れた生成子どうしの交換子 $[X^a, X^b]$ は，一般には破れていない生成子

S^a と破れた生成子 X^c の線形結合となるが，特に，S^a だけで書けるとき，

$$[\mathcal{G}-\mathcal{H},\ \mathcal{G}-\mathcal{H}]\subset\mathcal{H} \tag{5}$$

の場合，商空間 (coset space)† G/H は対称空間 (symmetric space) と呼ばれる。G/H が対称空間の場合とは，要するに，G の生成子に "パリティ" 変換 τ,

$$\begin{aligned}&\tau:\ \mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{G},\\&\tau^2=1,\end{aligned}\qquad\begin{cases}\tau(Y)=+Y & Y\in\mathcal{H}\ \text{のとき}\\ \tau(Y)=-Y & Y\in\mathcal{G}-\mathcal{H}\ \text{のとき}\end{cases} \tag{6}$$

を行っても代数が不変だということである††。すなわち，破れた生成子 X^a には奇 $(-)$ の，破れていない生成子 S^a には偶 $(+)$ の，"パリティ" 量子数を付与できる場合である。(前節 **6-3** のカイラル群の $G/H=U(n)_{\rm L}\times U(n)_{\rm R}/U(1)_{\rm V}$ は対称空間の例である。)

6-1〜**6-3** で見てきたように，現れる NG ボソンは，個数が商空間 G/H の次元 $\dim(G/H)=\dim G-\dim H$ に等しく，破れていない部分群 H の下では線形に変換する。この事実は，NG ボソン場 π^a を商空間 G/H の座標に同定すべきことを示唆している。そこで，$\xi(\pi)$ を (右) 商空間 G/H の代表元††† (representatives) とし，それを，次のように NG ボソン場 π^a でパラメトライズする：

$$\xi(\pi)=e^{i\pi(x)},\qquad \pi(x)\equiv\sum_{a\in\mathcal{G}-\mathcal{H}}\pi^a(x)X^a. \tag{7}$$

この時点で NG 場 $\pi^a(x)$ は (質量) 次元 0 の量であることに注意しておこう。以下，くり返し添字についての和記号は，しばしば省略する。(7) に群 G の元 g を左から掛けた $g\xi(\pi)$ も G の元であるから，(7) の形の G/H の代表元 $\xi(\pi')$ と H の元 $^{\exists}h$ との積に一意的に分解される：

$$g\xi(\pi)=\xi(\pi')h(\pi,g),\qquad h(\pi,g)\in H. \tag{8}$$

この元 h は，g と同時に $\pi(x)$ にもよることに注意せよ。そこで，NG 場 $\pi(x)$ の，群 G の大局的変換 $g\in G$ の下での変換則は

$$\xi(\pi)\longrightarrow\xi(\pi')=g\xi(\pi)h^{-1}(\pi,g),\qquad g\in G \tag{9}$$

で定義する。この $\pi(x)$ から $\pi'(x)$ への G 変換は，場 $\pi^a(x)$ に関して非線

---

† 等質空間 (homogeneous space) とも呼ばれる。

†† 数学では，(6) のパリティ変換 τ のことを対合的自己同形写像 (involutive automorphism) と呼ぶ。

††† 右商空間 G/H とは，同値類 $gH=\{g'\in G\,|\,g'=gh,\ h\in H\}$ を一つの元とみなして G から得られる空間である。各同値類から一つずつ元 $\xi\in G$ を持ってきたとき，ξ を G/H の代表元と呼ぶ。

形な変換であるので，NG 場 $\pi(x)$ による群 G の表現は非線形表現 (nonlinear realization) と呼ばれる。しかし，g が破れていない部分群 H の元 h である場合には，この変換 (9) は期待されるように線形となる。実際，破れた生成子の性質 (4) より，$hX^a h^{-1}\in \mathcal{G}-\mathcal{H}$ であるから，$\{X^a\}$ は H の線形な，一般に可約な，表現基底を与える：すなわち，

$$h(\{X^{a_1}\},\{X^{a_2}\},\cdots,\{X^{a_n}\})h^{-1}$$
$$=(\{X^{b_1}\},\{X^{b_2}\},\cdots,\{X^{b_n}\})\begin{pmatrix} \rho^1_{b_1a_1}(h) & & & 0 \\ & \rho^2_{b_2a_2}(h) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \rho^n_{b_na_n}(h) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

それゆえ，$h\in H$ に対しては，$h(\pi,g=h)$ は h 自身となり，(9) の変換は

$$\xi(\pi')=h\xi(\pi)h^{-1} \Longrightarrow \pi'(x)=h\pi(x)h^{-1}, \qquad h\in H \tag{11}$$

の線形変換となり，NG ボソン場 $\{\pi^a(x)\}$ も，$\{X^a\}$ の既約分解 (10) に対応して，$(\{\pi^{a_1}(x)\},\{\pi^{a_2}(x)\},\cdots,\{\pi^{a_n}(x)\})$ に分解され，各 H-既約なセクター $\{\pi^{a_i}(x)\}$ に属する成分 $\pi^{a_i}(x)$ はそのセクターの中で，$\pi'^{a_i}=\rho^i_{a_ib_i}(h)\pi^{b_i}$ の線形変換を受ける。$\mathcal{G}-\mathcal{H}$ の生成子 $\{X^a\}$ が H-既約のとき，すなわち，(10) で $n=1$ の場合，商空間 G/H は既約と呼ばれる。

まず，簡単のため，G が単純群の場合を考える。非線形表現 Lagrangian の構成において基本的な役割を果たす量は，$\xi(\pi)\in G/H$ からつくられる次の 1-form である：

$$\alpha(\pi)=i^{-1}\xi^{-1}(\pi)d\xi(\pi), \tag{12}$$

あるいは，もっとあらわに成分，$\alpha=\alpha_\mu dx^\mu$，$d\xi=\partial_\mu\xi\, dx^\mu$，で書けば

$$\alpha_\mu(\pi)=i^{-1}\xi^{-1}(\pi)\,\partial_\mu\xi(\pi). \tag{13}$$

この，数学では Maurer (マウレー)-Cartan (カルタン) 1-form と呼ばれる，1-form $\alpha(\pi)$ は，Lie 代数 $\mathcal{G}$ に属する元であり，したがって，その基底 $\{T^A\}=\{S^a\in\mathcal{H},\ X^a\in \mathcal{G}-\mathcal{H}\}$ で展開できることに注意する。そこで，$\mathcal{H}$ に属する成分 $\alpha_{/\!/}$ と $\mathcal{G}-\mathcal{H}$ に属する成分 $\alpha_\perp$ に分け，それぞれを $\mathcal{H}$ に平行，直交成分と呼ぶ：

$$\alpha_{\mu/\!/}(\pi)\equiv\alpha^a_\mu(\pi)S^a=2\,\mathrm{tr}(S^a\alpha_\mu(\pi))\cdot S^a\in\mathcal{H}, \tag{14}$$
$$\alpha_{\mu\perp}(\pi)\equiv\alpha^a_\mu(\pi)X^a=2\,\mathrm{tr}(X^a\alpha_\mu(\pi))\cdot X^a\in \mathcal{G}-\mathcal{H}. \tag{15}$$

Maurer-Cartan 1-form $\alpha_\mu(\pi)$ の G 変換は，$\xi(\pi)$ の変換則 (9) より

$$\alpha_\mu(\pi) \longrightarrow \alpha_\mu(\pi')=h(\pi,g)\alpha_\mu(\pi)h^{-1}(\pi,g)+i^{-1}h(\pi,g)\partial_\mu h^{-1}(\pi,g) \tag{16}$$

となる。ここで非斉次項 $h\partial_\mu h^{-1}$ は $\mathcal{H}$ に属するから，

$$\alpha_{\mu\parallel}(\pi) \longrightarrow \alpha_{\mu\parallel}(\pi') = h(\pi,g)\alpha_{\mu\parallel}(\pi)h^{-1}(\pi,g) + i^{-1}h(\pi,g)\partial_\mu h^{-1}(\pi,g) \quad (17)$$

$$\alpha_{\mu\perp}(\pi) \longrightarrow \alpha_{\mu\perp}(\pi') = h(\pi,g)\alpha_{\mu\perp}(\pi)h^{-1}(\pi,g), \quad (18)$$

が導かれる。すなわち，直交成分 $\alpha_{\mu\perp}(\pi)$ だけが斉次な変換をする。破れた生成子 $\{X^a\}$ は，上述のように，一般に H の下で可約表現で (10) のように既約分解されるから，直交成分 $\alpha_{\mu\perp}(\pi)$ も，n 個の既約成分

$$\alpha_{\mu\perp}^{(i)}(\pi) \equiv \alpha_\mu^{a_i}(\pi)X^{a_i} = 2\,\mathrm{tr}(X^{a_i}\alpha_\mu(\pi))\cdot X^{a_i} \quad (19)$$

(添字 a_i は $\mathcal{G}-\mathcal{H}$ の i 番目の H-既約セクター $\{X^{a_i}\}$ 上のみを走る) に分解され，それぞれ独立に変換する：

$$\alpha_{\mu\perp}^{(i)}(\pi') = h(\pi,g)\alpha_{\mu\perp}^{(i)}(\pi)h^{-1}(\pi,g),$$

$$\text{または,} \quad \alpha_\mu^{a_i}(\pi') = \rho^i_{a_ib_i}(h(\pi,g))\alpha_\mu^{b_i}(\pi). \quad (20)$$

したがって，NG ボソン場のみからつくれる，微分の次数が最低次 (2 次) の，G-不変な最も一般的な Lagrangian は

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n f_i^2\,\mathrm{tr}(\alpha_{\mu\perp}^{(i)}(\pi))^2 \quad (21)$$

で与えられることになる。すなわち，$\mathcal{G}-\mathcal{H}$ の H-既約成分の数 n だけの任意定数 f_i^2 を含む。4 次元時空の場合，$\dim\mathcal{L}=4$ であるから，$\dim\alpha_\mu = \dim\partial_\mu = 1$ に注意して，この定数 f_i は次元 $+1$ の量であることがわかる。

この定数 f_i は，実は，先に定義した NG ボソンの崩壊定数 (結合定数) f_π のことで，i 番目の H-既約セクターの NG ボソン $\pi^{a_i}(x)$ に対応するものなので $f_\pi^{(i)}$ とでも書くべき量である。このことを見るために，まず，Maurer-Cartan 1-form $\alpha_\mu(\pi)$ を，$\pi(x)=\pi^a(x)X^a$ であらわに表すべく，次の公式に注意する：

$$\alpha_\mu(\pi) = i^{-1}e^{-i\pi}\partial_\mu e^{i\pi} = [(e^{\Delta_{\pi/i}}-1)/\Delta_{\pi/i}]\partial_\mu\pi$$

$$= \partial_\mu\pi + \frac{1}{2!}\frac{1}{i}[\pi,\partial_\mu\pi] + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{i}\right)^2[\pi,[\pi,\partial_\mu\pi]] + \cdots, \quad (22)$$

ただし，$\Delta_{\pi/i}$ は任意の Lie 代数 $\mathcal{G}$ の元 Y に対し

$$\Delta_{\pi/i}\cdot Y \equiv i^{-1}[\pi, Y] \quad (23)$$

でその作用が定義される演算子である。(22) の初項が $\partial_\mu\pi$ であるから，

$$\alpha_{\mu\perp}^{(i)}(\pi) = X^{a_i}\partial_\mu\pi^{a_i}(x) + (\pi \text{ について 2 次以上の項}) \quad (24)$$

がわかる。それゆえ，NG ボソン場 $\pi^{a_i}(x)$ が，Lagrangian (21) において規格化された運動項 $+(1/2)\partial_\mu\pi^{a_i}\partial^\mu\pi^{a_i}$ を持つように (かつ，正しい場の次元 $\dim\pi^{a_i}=+1$ を持つように)，場の変数 $\pi^{a_i}(x)$ の再定義

$$\pi^{a_i}(x) \longrightarrow \pi^{a_i}(x)/f_i \tag{25}$$

を行う。$[\mathrm{tr}(X^{a_i}X^{b_i})=(1/2)\delta_{a_ib_i}$ に注意。] そうすれば，(9)で与えた $\pi(x)$ の変換則から，g が破れた生成子 X^{a_i} 方向の無限小変換 $g=\exp(i\theta^{a_i}X^{a_i})\simeq 1+i\theta^{a_i}X^{a_i}$ のとき，$\pi^{a_i}(x)$ の変換 $\pi'^{a_i}-\pi^{a_i}=\delta\pi^{a_i}$ のみが場について 0 次の項を持ち

$$\delta\pi^{a_i}(x)=f_i\,\theta^{a_i}(x)+(\pi \text{ について 1 次以上の項}) \tag{26}$$

となることが従う。よって X^{a_i} に対応する Noether カレント $j_\mu^{a_i}$ は

$$j_\mu^{a_i}(x)=f_i\,\partial_\mu\pi^{a_i}(x)+(\pi \text{ について 2 次以上の項}) \tag{27}$$

の形をとり，f_i は確かに π^{a_i} の崩壊定数であることがわかる。

G/H が既約対称空間の場合は特に簡単で，$\alpha_\mu(\pi)$ の展開式(22)で π について偶数次の部分が $\alpha_{\mu/\!/}\in\mathcal{H}$，奇数次の部分が $\alpha_{\mu\perp}\in\mathcal{G}-\mathcal{H}$，と明らかに分離でき，$n=1$ であるから，(21)の Lagrangian は，($f_1=f_\pi$ と書いて)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\mathrm{tr}\left(\partial_\mu\pi+\frac{1}{3!}(if_\pi)^{-2}[\pi,[\pi,\partial_\mu\pi]]+\cdots\right)^2\\&=\mathrm{tr}(\partial_\mu\pi)^2-(3f_\pi{}^2)^{-1}\mathrm{tr}(\partial^\mu\pi[\pi,[\pi,\partial_\mu\pi]])+\cdots\end{aligned} \tag{28}$$

となる。

G が単純群でない場合にも本質的に同様にやればよい。例として，前節で議論したカイラル対称性の場合，

$$G/H=U(n)_\mathrm{L}\times U(n)_\mathrm{R}/U(n)_\mathrm{V} \tag{29}$$

を少し説明しておく。G が半単純群 $U(n)_\mathrm{L}\times U(n)_\mathrm{R}$ であるから，G の元 g は $g_\mathrm{L}\in U(n)_\mathrm{L}$ と $g_\mathrm{R}\in U(n)_\mathrm{R}$ の組 $(g_\mathrm{L},g_\mathrm{R})$ であり，$Q^a=Q_\mathrm{L}^a+Q_\mathrm{R}^a$ に対応する破れてない生成子は (T^a,T^a)，$Q_5^a=-Q_\mathrm{L}^a+Q_\mathrm{R}^a$ に対応する破れた生成子は $(-T^a,T^a)$ で与えられ，したがって，部分群 $H=U(n)_\mathrm{V}$ は (g,g) の形の元から成る。それゆえ，(7)，(13)，(14)，(15)で与えた $\xi(\pi)$，$\alpha_\mu(\pi)$，$\alpha_{\mu/\!/}$，$\alpha_{\mu\perp}$ に対応する量は，それぞれ

$$\xi(\pi):\ (e^{-i\pi^a(x)T^a/f_\pi},e^{+i\pi^a(x)T^a/f_\pi})\equiv(\xi^{-1}(\pi),\xi(\pi))$$

$$\begin{aligned}\alpha_\mu(\pi):\ &i^{-1}(\xi^{-1}(\pi),\xi(\pi))^{-1}\partial_\mu(\xi^{-1}(\pi),\xi(\pi))\\&=(i^{-1}\xi(\pi)\partial_\mu\xi^{-1}(\pi),\,i^{-1}\xi^{-1}(\pi)\partial_\mu\xi(\pi)) &(30)\\&\equiv(\alpha_{\mu/\!/}-\alpha_{\mu\perp},\,\alpha_{\mu/\!/}+\alpha_{\mu\perp}), &(31)\end{aligned}$$

$$\alpha_{\mu/\!/}(\pi)=(2i)^{-1}[\xi^{-1}(\pi)\,\partial_\mu\xi(\pi)+\xi(\pi)\,\partial_\mu\xi^{-1}(\pi)], \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{\mu\perp}(\pi)&=(2i)^{-1}[\xi^{-1}(\pi)\,\partial_\mu\xi(\pi)-\xi(\pi)\,\partial_\mu\xi^{-1}(\pi)]\\&=(2i)^{-1}\xi(\pi)(U^{-1}\partial_\mu U)\xi^{-1}(\pi),\end{aligned} \tag{33}$$

となる。ただし，最後の式で

$$U \equiv \xi^2(\pi) = e^{2i\pi(x)/f_\pi} \tag{34}$$

を導入した。また，この場合 G/H は既約で，その一つしかない崩壊定数 f_π であらかじめ NG ボソン場を規格化しておいた。

(9) に相当する $G=U(n)_L\times U(n)_R\ni(g_L, g_R)$ 変換則は

$$\begin{aligned}(\xi^{-1}(\pi'), \xi(\pi')) &= (g_L, g_R)(\xi^{-1}(\pi), \xi(\pi))(h(\pi, g_L, g_R), h(\pi, g_L, g_R))^{-1}\\ &= (g_L\xi^{-1}(\pi)h^{-1}(\pi, g_L, g_R),\ \ g_R\xi(\pi)h^{-1}(\pi, g_L, g_R))\end{aligned} \tag{35}$$

となるが，この場合，両辺で右元を左元で割ったものを計算すれば

$$U' = \xi^2(\pi') = g_R\,\xi^2(\pi)g_L^{-1} = g_R\,Ug_L^{-1} \tag{36}$$

のように $h(\pi, g_L, g_R)$ の消えた式が得られ，π の変換則が容易に求まる。カイラル $U(n)_L\times U(n)_R$ 不変 Lagrangian は，(21), (33) より一意的に

$$\mathcal{L}_{カイラル} = f_\pi{}^2\,\mathrm{tr}\,(\alpha_{\mu\perp}(\pi))^2 = -\frac{f_\pi{}^2}{4}\mathrm{tr}\,(U^{-1}\partial_\mu U)^2 \tag{37}$$

で与えられる。(33) の第 1 等式が $\alpha_{\mu\perp}(\pi) = [i^{-1}\xi^{-1}(\pi)\partial_\mu\xi(\pi)]_{\pi の奇数次項}$ を表していることに気付けば，(37) の $\mathcal{L}_{カイラル}$ は，上で与えた既約対称 G/H の場合の Lagrangian (28) とぴったり同じ式になることがわかる。

物質場との相互作用　物質場 $\chi(x)$ はもちろん破れていない群 H の線形表現になっており，既約分解するのは自由だから，既約表現 ρ_0 に属するとする；すなわち，$h\in H$ の下で $\chi(x)\ \to\ \chi'(x) = \rho_0(h)\chi(x)$ と変換する。そこで，全体の群 G の下では，(9) の $h(\pi, g)$ を用いて

$$\chi(x)\ \longrightarrow\ \chi'(x) = \rho_0(h(\pi, g))\chi(x), \qquad g\in G \tag{38}$$

と変換すると定義する。この変換は，NG ボソン場 π も現れているので非線形である。

今，G の線形既約表現 ρ を任意にとってきたとすると，G の元を H に限れば，ρ は H の表現としては一般に可約で，既約な成分 ρ_i に分解される。そこで，この H-既約な成分として，上の ρ_0 を含むような，G の既約表現 ρ を任意に一つ持ってくる：すなわち，

$$\rho(h) = \begin{pmatrix} \rho_0(h) & & 0 \\ & \rho_1(h) & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \qquad {}^\forall h\in H \tag{39}$$

とする。これに対応して，物質場 $\chi(x)$ の方も水増しして，

$$\hat{\chi}(x) \equiv \begin{pmatrix} \chi(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{40}$$

を定義し，表現 ρ の次元と同じ成分数を持つベクトルにする。そうすれば，

$$\psi(x)\equiv\rho(\xi(\pi))\hat{\chi}(x) \tag{41}$$

で定義される場 $\psi(x)$ は，群 G の下で線形に変換する；実際，(9)，(38) より

$$\begin{aligned}\psi(x) \underset{g}{\longrightarrow} \psi'(x)&=\rho(\xi(\pi'))\hat{\chi}'(x)\\&=\rho(g\xi(\pi)h^{-1}(\pi,g))\widehat{\rho_0(h(\pi,g))\chi(x)}\\&=\rho(g)\rho(\xi(\pi))\rho(h^{-1}(\pi,g))\rho(h(\pi,g))\hat{\chi}(x)\\&=\rho(g)\psi(x)\end{aligned} \tag{42}$$

が従う。それゆえ $\psi(x)$ は線形基底 (linear basis)，もとの場 $\chi(x)$ は非線形基底，と呼ばれる。いったん，線形基底 $\psi(x)$ を (41) で構成すれば，$\psi(x)$ を用いて G 不変な Lagrangian を書き下すのは自明である。得られた Lagrangian は，$\psi(x)$ が内部に $\xi(\pi)$ を含むので，物質場 χ と NG ボソン場 π の相互作用項まで与える。

例えば，物質場 $\chi(x)$ が Dirac 場の場合，NG ボソン場 π との相互作用項を π の微分が最低次 (1 次) のものに限れば，最も一般的 Lagrangian は，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi-m\bar{\psi}\psi+\sum_{i=1}^{n}(1-g_A^{(i)})\bar{\psi}\gamma^\mu\rho(\xi(\pi)\alpha_{\mu\perp}^{(i)}(\pi)\xi^{-1}(\pi))\psi\\&=\bar{\chi}i\gamma^\mu[\partial_\mu+i\rho_0(\alpha_{\mu/\!/}(\pi))]\chi-m\bar{\chi}\chi-\sum_{i=1}^{n}g_A^{(i)}\bar{\hat{\chi}}\gamma^\mu\rho(\alpha_{\mu\perp}^{(i)}(\pi))\hat{\chi}\end{aligned} \tag{43}$$

で与えられる。$g_A^{(i)}$ は G/H の H-既約成分の数 n だけある任意定数で，カイラル対称性の場合の Goldberger-Treiman 関係式に現れた軸性電荷の値 $g_A(q^2=0)$ に相当するものである。(43) 第 2 行への等号の証明は読者に任せよう。

ゲージ場との結合　ここまで大局的不変性と考えてきた群 G の全部，または部分群，$I\subset G$，を局所的不変性に昇格させれば (I をゲージ化すると言う)，ゲージ群 I のゲージ場 $V_\mu(x)=V_\mu^i(x)Q^i$ (Q^i：I の生成子) を NG ボソンに結合させることができる。方法は簡単で，単に (13) の Maurer-Cartan 1-form $\alpha_\mu(\pi)$ において，$\partial_\mu\xi$ を I-共変微分に置き換えればよい：

$$\hat{\alpha}_\mu(\pi)\equiv i^{-1}\xi^{-1}(\pi)D_\mu\xi(\pi),\quad D_\mu\xi(\pi)=\partial_\mu\xi(\pi)-ieV_\mu(x)\xi(\pi). \tag{44}$$

上のすべての式でも $\alpha_\mu(\pi)$ を $\hat{\alpha}_\mu(\pi)$ に置き換える。そうすれば，例えば (21) の Lagrangian は，I ゲージ不変で，かつ，ゲージ結合定数 $e=0$ の極限で大局的 G 不変な，Lagrangian を与える†。

---

† もし $I\supsetneq H$ ならば，(21) の Lagrangian は，$\mathcal{I}-\mathcal{H}$ の生成子に対応した成分のゲージ場 $V_\mu{}^i$ の質量項を与える。すなわち，次節に述べる Higgs 現象が起こっている。

多様体 G/H の座標としての NG ボソン場　一般的にいえば，NG ボソン場の変数は G 不変な計量を持つ商多様体 G/H をパラメトライズする座標である。(7), $\xi(\pi)=\exp(i\pi^a X^a)$, で与えた“標準的”NG 場変数 π^a は，単に G/H の一つの座標のとり方にすぎず，$\{\pi^a\}$ と 1 対 1 対応

$$\varphi^\alpha=f^\alpha(\pi), \qquad \alpha=1,2,\cdots,\dim G-\dim H, \tag{45}$$

を持つ他のどんな変数 $\{\varphi^\alpha\}$ も等しく座標付けとして使い得る。そのとき，Maurer-Cartan 1-form の (15) の直交成分 $\alpha_{\mu\perp}(\pi)$ は，一般に

$$\alpha_{\mu\perp}(\pi)=X^a\,e^a_\alpha(\varphi)\,\partial_\mu\varphi^\alpha \tag{46}$$

の形をとり，NG ボソン Lagrangian (21) は

$$\mathcal{L}=g_{\alpha\beta}(\varphi)\partial_\mu\varphi^\alpha\partial^\mu\varphi^\beta, \tag{47}$$

$$g_{\alpha\beta}(\varphi)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}f_i^2\,e^{a_i}_\alpha(\varphi)\,e^{a_i}_\beta(\varphi) \tag{48}$$

と書ける。この形 (47) では，$g_{\alpha\beta}(\varphi)$ は明らかに多様体 G/H の計量テンソルと同定できるだろう。また (48) は，この G/H の G 不変な計量が一意的でなく，n 個の任意パラメータ f_i^2 を持つことを示している。

S 行列が場の変数の選び方によらないこと　同じ一つの Lagrangian でも，(45) のように場の変数のとり方を変えれば，Lagrangian は違った関数形，$\mathcal{L}(\pi)$ と $\tilde{\mathcal{L}}(\varphi)[=\tilde{\mathcal{L}}(f(\pi))=\mathcal{L}(\pi)]$，をとり，もちろん，Green 関数

$$G^{a_1\cdots a_n}_{(n\pi)}(x_1\cdots x_n)=\langle 0|\mathrm{T}\,\pi^{a_1}(x_1)\cdots\pi^{a_n}(x_n)|0\rangle, \tag{49}$$

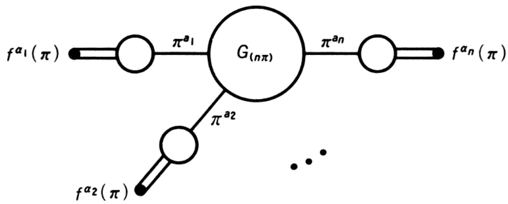
$$G^{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{(n\varphi)}(x_1\cdots x_n)=\langle 0|\mathrm{T}\,\varphi^{\alpha_1}(x_1)\cdots\varphi^{\alpha_n}(x_n)|0\rangle, \tag{50}$$

も互いに異なる。しかし，今の非線形表現 Lagrangian の場合に限らず，全く一般的に，**S 行列は“どんな”場の変数を選んで計算しても同じ，**ということが示せる。これを亀淵-O'Raifeartaigh (オラファッティ)-Salam (サラム) の定理と呼ぶ。“どんな”というのにはもちろん以下でわかる弱い制限がつく。

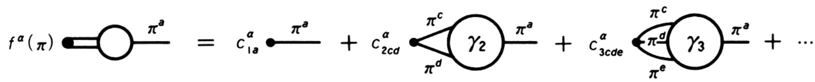
証明は，**5-11** で与えた物理的 S 行列のゲージ固定非依存性の証明と本質的には同じである。もとの変数 π と“新しい”変数 φ とは (45) の変数変換で結びついているのだから，$\tilde{\mathcal{L}}(\varphi)$ を用いて計算される φ 場の Green 関数 (50) は，明らかに，

$$\begin{aligned}G^{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{(n\varphi)}(x_1\cdots x_n)&=\langle 0|\mathrm{T}\,f^{\alpha_1}(\pi(x_1))\cdots f^{\alpha_n}(\pi(x_n))|0\rangle\\&\equiv G^{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{(nf(\pi))}(x_1\cdots x_n)\end{aligned} \tag{51}$$

の等式を満たす。右辺は，$\mathcal{L}(\pi)=\tilde{\mathcal{L}}(f(\pi))$ に基づく π 系の複合場 $f^\alpha(\pi(x))$ の Green 関数である。一般に関数 $f^\alpha(\pi)$ は π についてべき展開される：



6·8 図 LSZ 手続きで生き残る $G_{(nf(\pi))}$ のグラフ



6·9 図 6·8 図中の $f^a(\pi)$-π^a 遷移グラフ

$$\varphi^a = f^a(\pi) = c^a_{1a}\,\pi^a + c^a_{2ab}\,\pi^a\pi^b + c^a_{3abc}\,\pi^a\pi^b\pi^c + \cdots. \tag{52}$$

ここではまず，係数 $c_1, c_2, \cdots$ はすべて微分を含まない定数と考えておく。[そのような $\pi \to \varphi$ の変数変換は点変換 (point transformation) と呼ばれる。]

φ 系で S 行列を計算するには，LSZ 公式に従い，$G_{(n\varphi)}$ の n 本の脚のそれぞれに Klein-Gordon 演算子 $i(m^2-p^2)$ を掛け，$p^2=m^2$ とおく†。ところが，$G_{(n\varphi)}$ は，π 系で計算した (51) 右辺の複合場 Green 関数 $G_{(nf(\pi))}$ に等しいから，この質量殻上におく手続きで生き残れる π 系での Feynman グラフは，6·8 図に示すような，n 本の複合場 $f^a(\pi)$ の脚のそれぞれが，結局 π 伝播関数 1 本線に帰着するもののみである。6·8 図中に現れる複合場 $f^a(\pi)$ から π^a 1 体への遷移グラフの中身は (52) の展開に対応した 6·9 図で与えられる。S 行列に関係するのは 1 粒子 pole の留数のみであるから，結局，6·9 図の遷移グラフの全体的効果は，次の置き換えと等価である：

$$\begin{aligned} &\varphi^a = f^a(\pi) \longrightarrow (Z^{1/2})^a_a\,\pi^a, \\ &(Z^{1/2})^a_a = c^a_{1a} + c^a_{2cd}\,\gamma^{cd}_{2a}(p^2=m^2) + c^a_{3cde}\,\gamma^{cde}_{3a}(p^2=m^2) + \cdots. \end{aligned} \tag{53}$$

ここで $\gamma_2(p^2), \gamma_3(p^2)$ 等は，6·9 図のグラフで定義される関数である。同じ手続きを 2 点関数に対して行えば，pole $p^2=m^2$ 近傍で

$$\begin{aligned} \langle 0|\mathrm{T}\varphi^a\varphi^\beta|0\rangle &= \langle 0|\mathrm{T}f^a(\pi)f^\beta(\pi)|0\rangle \\ &\simeq (Z^{1/2})^a_a(Z^{1/2})^\beta_b\langle 0|\mathrm{T}\pi^a\pi^b|0\rangle \end{aligned} \tag{54}$$

† NG ボソンの場合はもちろん $m^2=0$ である。一般の場合 m^2 は行列と考えるべきである。

の等式を得るから，もとの場 π^a がきちんと規格化された場であったとすれば，$(Z^{1/2})^a_{\dot{a}}$ は φ 場のくり込み定数(行列)であることがわかる。したがって，φ 系で S 行列を計算するときは，$\varphi^a=f^a(\pi)$ の各々の脚に，上の手続きと同時に $Z^{1/2}$ の逆行列を掛けねばならないから，結局，(53)の置き換え則は，φ 系の S 行列が π 系の S 行列と等しいことを証明している。

この証明が成り立つための唯一の制限は，(53)の行列 $(Z^{1/2})^a_{\dot{a}}$ が逆行列を持つこと，すなわち $\det Z^{1/2}\neq 0$ である。tree(ループのないグラフ)レベルでは $Z^{1/2}=c_1$ であるから，(52)の展開の第1項の係数 $c^a_{1\dot{a}}$ が正則行列であれ，ということである。また，上では点変換といってきたが，点変換である必要もなく，(52)の係数 c_i が微分を含んでいても(すなわち運動量の関数でも)，$\det Z^{1/2}\neq 0$ でさえあれば，かまわない。

6-5　Higgs 現象

素粒子論は，少なくとも Poincaré 不変性(並進および Lorentz 不変性)を満たす理論であるから，6-1 の南部-Goldstone の定理は，自発的対称性の破れが起これば**必ず**適用できるように見える。しかし，現実において，厳密に零質量の粒子として観測されている素粒子は光子(photon)とニュートリノ(neutrino)しか存在しない。光子や重力子(graviton)は，(もちろんゲージ場として記述されるものだが)確かにそれぞれベクトル，テンソル対称性の自発的破れに伴う NG ボソンとして理解できることが知られている†が，一方，ニュートリノは，スピノール対称性(超対称性)に対応する NG フェルミオンと考えると低エネルギー定理の予言と矛盾することが確かめられており，NG フェルミオンではなさそうである。[近似的に“零”質量の粒子としては π 中間子が存在し，実際，南部-Jona-Lasinio が素粒子論において初めて自発的対称性の破れの概念を提唱し，NG ボソンであると指摘したのは π 中間子である。事実，π 中間子が近似的カイラル対称性の自発的破れに対応する NG ボソンであることは，その後の1960年代の10年間に，カレント代数，低エネルギー定理などの多くの成功により確かめられ，強い相互作用の解明に大きな寄与をした。]

そうすれば，この事実は，対称性の自発的破れが比較的まれな現象だと

† 演習問題 6.6 参照。

いうことを意味しているのだろうか？　答は否である。**ゲージ理論の場合は，対称性の自発的破れと観測される零質量 NG 粒子との間の 1 対 1 対応が成立しない，**のである。ゲージ理論において，共変なゲージの場合は，もちろん，対称性が自発的に破れれば定理のいうように NG 粒子が現れる。ところが定理はその NG 粒子が正の計量を持った物理的粒子だということを主張していない。それが不定計量を持つ (BRS 不変でない) モードであれば，物理的空間 $\mathcal{V}_{\rm phys}$ では観測されない。他方，Coulomb ゲージ $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ や時間的軸性ゲージ (time-like axial gauge) $A_0=0$ などの非共変ゲージの場合は，正定値計量であるから，理論に現れる粒子は皆観測される粒子である。ところが，今度は南部-Goldstone 定理の “明白な Lorentz 共変性” の仮定が壊れるため必ずしも NG 粒子が現れるとは限らないのである。この可能性は，Higgs，Kibble 等によって初めて指摘された。

Higgs 模型　このことを具体的に示す最も簡単な例は，先の Goldstone 模型 **6-2** (1) に，$U(1)$ 対称性をゲージ化して電磁場を導入した Higgs 模型である。その Lagrangian は

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+(D_\mu\varphi)^\dagger D^\mu\varphi+\mu^2\varphi^\dagger\varphi-\frac{\lambda}{2}(\varphi^\dagger\varphi)^2, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&F_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu,\\ &D_\mu\varphi\equiv(\partial_\mu-ieA_\mu)\varphi.\end{aligned} \tag{2}$$

Goldstone 模型のときと同じく，ここでも，tree レベルで $\langle 0|\varphi|0\rangle=v/\sqrt{2}=\sqrt{\mu^2/\lambda}$ の真空期待値を生じる。便宜のため，ひとまず，複素場 $\varphi(x)$ のシフトを前の **6-2** (9) と少し変えて；極分解 (polar decomposition) と呼ばれる次の形にとる：

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(v+\rho(x))e^{i\pi(x)/v} \qquad (\rho, \pi\,;\,\text{実場}) \tag{3}$$

[位相部分 $e^{i\pi(x)/v}$ は前節の非線形表現の G/H の代表元のパラメトリゼーション **6-4** (7) の $G/H=U(1)/\{1\}$ の場合に対応している。]　そうすれば，$\varphi(x)$ の運動項が

$$\begin{aligned}(D_\mu\varphi)^\dagger D^\mu\varphi&=\frac{1}{2}\left|e^{i\pi/v}[\partial_\mu-ie(A_\mu-\partial_\mu\pi/ev)](v+\rho)\right|^2\\ &=\frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2+\frac{1}{2}e^2(\rho+v)^2(A_\mu-\partial_\mu\pi/ev)^2\end{aligned} \tag{4}$$

となり，$\varphi^\dagger\varphi=(v+\rho)^2/2$，および **6-2** (10) を考慮して

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2+\frac{1}{2}M^2\left(1+\frac{e}{M}\rho\right)^2(A_\mu-M^{-1}\partial_\mu\pi)^2$$
$$+\frac{1}{2}[(\partial_\mu\rho)^2-m^2\rho^2]-\frac{1}{2}m\sqrt{\lambda}\,\rho^3-\frac{\lambda}{8}\rho^4-V_0(v) \qquad (5)$$

を得る。ただし，ここで

$$M\equiv ev=|\mu|\sqrt{\frac{2e^2}{\lambda}} \qquad (6)$$

とおいた。e と $\sqrt{\lambda}$ が同じ程度の小さな結合定数だとすると，この M は $O(1)$ の量で，$e\sim\sqrt{\lambda}$ に関して摂動展開ができる。ところが，NG ボソンの候補である位相場 $\pi(x)$ は，(5) で $(A_\mu-M^{-1}\partial_\mu\pi)$ の組合せでしか現れていないから

$$U_\mu\equiv A_\mu-M^{-1}\partial_\mu\pi \qquad (7)$$

を新たなベクトル場の変数とすれば，$\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu=\partial_\mu U_\nu-\partial_\nu U_\mu$ だから

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}(\partial_\mu U_\nu-\partial_\nu U_\mu)^2+\frac{1}{2}M^2U_\mu{}^2(1+eM^{-1}\rho)^2+(\rho\text{ 場の項}) \qquad (8)$$

となって，$\pi(x)$ は完全に姿を消してしまう。しかも，ベクトル場 U_μ は質量 M を得たことに注意しよう。これを Higgs 現象と呼ぶ。

Higgs 現象において起っていることを，もう少し詳しく見よう。まず

$$\begin{cases}\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(v+\rho)e^{i\pi/v} \longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}(v+\rho)\\ \qquad A_\mu \qquad\quad \longrightarrow A_\mu-M^{-1}\partial_\mu\pi=U_\mu\end{cases} \qquad (9)$$

の変数変換は，ゲージ変換パラメータ $\theta(x)$ を q 数場 $M^{-1}\pi(x)$ とおいた“q 数”ゲージ変換になっていることに注意すべきである。すなわち，ゲージ場 A_μ は，“NG ボソン”場 π を**吸収して**，質量 M を持つベクトル場 U_μ(Proca 場)† になったのである。このとき，電磁相互作用を切ったとき $(e=0)$ と入れたとき $(e\neq0)$ の，物理的粒子の自由度の収支勘定をすれば，次のようになっている：

$$\begin{array}{ccc} e=0 & & e\neq0 \\ \left.\begin{array}{r} A_\mu：\text{零質量}\ (2\ \text{自由度}) \\ \pi：\text{零質量}\ (1\ \text{自由度})\end{array}\right\} & \longrightarrow & U_\mu：\text{質量}\ M\ (3\ \text{自由度}) \\ \rho：\text{質量}\ m\ (1\ \text{自由度}) & \longrightarrow & \rho：\text{質量}\ m\ (1\ \text{自由度})\end{array} \qquad (10)$$

スピン 1 粒子の物理的モードは，零質量のときはヘリシティ ±1 の 2 自由

---

† $\mathcal{L}=(-1/4)(\partial_\mu U_\nu-\partial_\nu U_\mu)^2+(1/2)M^2U_\mu{}^2$ で記述される有質量ベクトル場 U_μ を Proca (プロカ) 場という。

度しかないが，質量を得ると（静止系があり）$J_z=+1, 0, -1$ の 3 自由度となる。ここで不足している 1 自由度は，NG ボソン場 π により供給されたのである[†]。

(9) の右側の $\rho(x)$ や $U_\mu(x)$ はもはやゲージ不変な場であることに注意しよう。それゆえ，ρ と U_μ のみで書かれた (8) の $\mathcal{L}$ は既にある種のゲージ固定のなされた Lagrangian であり，通常，ユニタリー・ゲージと呼ばれる。ユニタリー・ゲージは，理論の物理的内容が明白でよいのだが，残念ながら，Proca 場 U_μ の伝播関数 $(g_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu/M^2)/k^2$ の紫外部 $(k\to\infty)$ での振舞いが悪く，くりこみができない。そこで次にくりこみ可能性の明らかな共変ゲージで同じ模型を考え直してみよう。

くりこみ可能共変ゲージ　複素場 φ のパラメトリゼーションとして，もう一度，(3) の極分解の代わりに，Goldstone 模型でとった **6-2** (9)

$$\varphi(x)=(v+\psi(x)+i\chi(x))/\sqrt{2} \tag{11}$$

を使う。そうすれば，(1) の Lagrangian は，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}M^2(A_\mu-M^{-1}\partial_\mu\chi)^2+\frac{1}{2}[(\partial_\mu\psi)^2-m^2\psi^2]\\&+eA^\mu(\chi\partial_\mu\psi-\psi\partial_\mu\chi)-\frac{1}{2}m\sqrt{\lambda}\,\psi(\psi^2+\chi^2)+eMA_\mu^2\psi\\&+\frac{1}{2}e^2A_\mu^2(\psi^2+\chi^2)-\frac{\lambda}{8}(\psi^2+\chi^2)^2-V_0(v)\end{aligned} \tag{12}$$

と書き直せる。これはまだゲージが固定されていないから，**5-4** で与えたゲージ固定処法に従って

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}=-i\,\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\Big[\bar{c}\,\Big(\partial^\mu A_\mu+\frac{1}{2}\alpha B\Big)\Big]=B\partial^\mu A_\mu+\frac{\alpha}{2}B^2+i\bar{c}\partial^\mu\partial_\mu c \tag{13}$$

を付け加える。これが普通の共変ゲージである。この可換群 $U(1)$ に基づく Higgs 模型では，この共変ゲージの場合，FP ゴースト $c, \bar{c}$ は全くの自由場であるから必ずしも導入する必要はない。

(13) とは別の R_ξ ゲージと呼ばれる便利な共変ゲージがある。まず，(12) の Lagrangian の第 2 項にゲージ場 A_μ と“NG ボソン”場 χ の遷移項 $-MA^\mu\partial_\mu\chi$ があることに注意する。遷移項があると場の混合が起こり面倒であるから，ゲージ固定項を工夫してこれを相殺することを考える。複素

† このように粒子の自由度の数が保存するのは，もちろん，摂動論の範囲のみのことで，それ以外では，一般に，結合状態が新たにつくられたり，消されたりして粒子の自由度は保存しない。

場 φ のゲージ変換 $\delta\varphi(x)=ie\,\theta(x)\,\varphi(x)$ は，(11) の成分場 $\psi(x), \chi(x)$ に対して

$$\delta\psi(x)=-e\,\theta(x)\,\chi(x), \qquad \delta\chi(x)=e\,\theta(x)(v+\psi(x)) \tag{14}$$

となるから，BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}$ はこの式で $\theta(x) \to c(x)$ としたもので与えられる。これに注意して，ゲージ固定を次のようにとる：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\mathrm{R}\xi}_{\mathrm{GF+FP}}&=-i\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\left[\,\bar{c}\left(\partial^\mu A_\mu+\alpha M\chi+\frac{1}{2}\alpha B\right)\right]\\&=B\,(\partial^\mu A_\mu+\alpha M\chi)+\frac{1}{2}\alpha B^2+i\bar{c}\,(\Box+\alpha M^2+e\alpha M\psi)c.\end{aligned} \tag{15}$$

ここで，NL 場 B を (Gauss 経路積分または運動方程式で) 消去すれば

$$\mathcal{L}^{R\xi}_{\mathrm{GF+FP}}=-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu+\alpha M\chi)^2+i\bar{c}\,(\Box+\alpha M^2)c+ie\alpha M\bar{c}c\psi \tag{16}$$

となり，A_μ と χ の交差項 $-M\chi\partial^\mu A_\mu$ が現れるから，前の遷移項 $-MA^\mu\partial_\mu\chi$ と合わせて全微分項となり落ちることになる。この R_ξ ゲージ[†]では，たとえ可換群 $U(1)$ の場合でも，FP ゴーストは $\bar{c}c\psi$ の相互作用項を持つのでもはや落とすことはできない。

Higgs 現象の共変ゲージでの理解 まず (13) の普通の共変ゲージの場合を見てみよう。$e\simeq\sqrt{\lambda}$ に関する摂動展開の第 0 次の自由項 Lagrangian $\mathcal{L}_0$ は，(12) の $\mathcal{L}$ の第 1 行と (13) の $\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}$ の和で与えられる。この $\mathcal{L}_0$ は，

$$U_\mu\equiv A_\mu-M^{-1}\,\partial_\mu\chi-M^{-2}\,\partial_\mu B \tag{17}$$

を導入すれば，ベクトル場部分が対角化されて，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0=&-\frac{1}{4}(\partial_\mu U_\nu-\partial_\nu U_\mu)^2+\frac{1}{2}M^2\,U_\mu^2+\frac{1}{2}[(\partial_\mu\psi)^2-m^2\,\psi^2]\\&+M^{-1}\,B\Box\chi+\frac{1}{2}M^{-2}\,B\Box B+\frac{1}{2}\alpha B^2+i\bar{c}\Box c\end{aligned} \tag{18}$$

となる。明らかに，U_μ は，運動方程式

$$(\Box+M^2)\,U_\mu=0, \qquad \partial^\mu U_\mu=0 \tag{19}$$

を満たす 3 モードを持つ質量 M の Proca 場であり，ψ は $(\Box+m^2)\psi=0$ に従う質量 m の実スカラー場である。B と χ のセクターは，運動方程式が

$$\Box\chi+\alpha MB=0, \qquad \Box B=0 \tag{20}$$

---

† R_ξ ゲージの名は，その原論文でゲージパラメータ α が $1/\xi$ と記されていたことから，「くりこみ可能性 (Renormalizability) の明白な ξ パラメータを持つゲージ」という意味で名付けられた。

で与えられるから，Landau ゲージ $\alpha=0$ では，B も χ も零質量スカラー場となる。この χ がもちろん NG 定理で要求される NG ボソン場である。また $\mathcal{L}_0$ に $B\Box\chi$ の項があることは，B 粒子と χ 粒子の計量が反対角であることを表している。[Landau ゲージ以外では χ は $\Box^2\chi=0$ の零質量 dipole 場となる。ここでは深入りしないが，この場合でも適当に χ の粒子モードを定義でき，単なる零質量場 $\Box\chi=0$ の粒子モードと本質的に変わらないことが示される。] FP ゴースト $c, \bar{c}$ も零質量である。摂動論においては，これらが漸近場のすべてで，高次項を考慮してもくりこみの効果があるのみである。すなわち，

$$
\begin{aligned}
&A_\mu(x) \underset{x_0\to\pm\infty}{\longrightarrow} Z_3^{1/2}\,U_\mu^{\rm as}(x)+M^{-1}\,a\,\partial_\mu\chi^{as}(x)+M^{-2}\,b\,\partial_\mu B^{\rm as}(x),\\
&\psi(x) \longrightarrow Z_\psi^{1/2}\,\psi^{\rm as}(x), \qquad B(x)\longrightarrow Z_B^{1/2}\,B^{\rm as}(x),\\
&\chi(x) \longrightarrow Z_\chi^{1/2}\,\chi^{\rm as}(x), \qquad c(x)=c^{\rm as}(x), \qquad \bar{c}(x)=\bar{c}^{\,\rm as}(x),
\end{aligned}
\tag{21}
$$

となる。Z_3, Z_ψ, Z_B, Z_χ はくりこみ定数，a, b も適当な定数である。摂動の第 0 次の $\mathcal{L}_0$ の M, m の値をあらかじめ全次数での Green 関数の pole の位置にとっておき，ゲージ・パラメータ α の値も適当なくりこまれたものとしておけば，(21) の漸近場 $U_\mu^{\rm as}, \psi^{\rm as}, \chi^{\rm as}, B^{\rm as}$ はすべての上の自由場運動方程式に従う規格化された場となる。

5-8 で詳しく述べたように，これら漸近場の BRS 変換則は，Heisenberg 場の変換則 $[i\lambda Q_{\rm B}, \Phi(x)]=\lambda\boldsymbol{\delta}_{\rm B}\Phi(x)$ の両辺で $x_0\to\pm\infty$ の極限をとって求めることができる。例えば $[iQ_{\rm B}, A_\mu(x)]=\partial_\mu c(x)$ の $x_0\to\pm\infty$ 極限は，(21) を用いて

$$
[iQ_{\rm B}, Z_3^{1/2}\,U_\mu^{\rm as}(x)+M^{-1}a\partial_\mu\chi^{\rm as}(x)+M^{-1}b\partial_\mu B^{\rm as}(x)]=\partial_\mu c^{\rm as}(x) \tag{22}
$$

$$
\Longrightarrow \begin{cases} [iQ_{\rm B}, U_\mu^{\rm as}(x)]=0, & (23)\\ [iQ_{\rm B}, \chi^{\rm as}(x)]=Ma^{-1}\,c^{\rm as}(x),\ \ [iQ_{\rm B}, B^{\rm as}(x)]=0, & (24)\end{cases}
$$

を導く。(22) の右辺は零質量の $c^{\rm as}(x)$ しか現れないので (23) が従い，$U_\mu^{\rm as}$ は BRS 不変な物理的粒子となる。また，(24) の最後の式は Heisenberg 場の段階で $B(x)$ は $Q_{\rm B}$ と可換だからである。同様に，(14) の BRS 版を考慮して

$$
[iQ_{\rm B}, \psi(x)]=-ec(x)\chi(x) \quad \Longrightarrow [iQ_{\rm B}, \psi^{\rm as}(x)]=0, \tag{25}
$$

$$
[iQ_{\rm B}, \chi(x)]=ec(x)(v+\psi(x)) \Longrightarrow [iQ_{\rm B}, \chi^{\rm as}(x)]=(\text{定数})c^{\rm as}(x) \tag{26}
$$

を得る。(25) は複合場 $c(x)\chi(x)$ のチャネルに，摂動論の範囲では，漸近

場(1粒子pole)が存在しないからである†。したがって ϕ^{as} は物理的粒子で，(物理的) Higgs 粒子と呼ばれる。(この ϕ^{as} は前のユニタリー・ゲージで ρ と記した場の漸近場と同じものである。) (26) の (定数) は，左側の式より tree レベルでは $ev=M$ であるが，loop 効果で補正を受け，もちろん (24) の Ma^{-1} に一致すべきものである。最後に

$$[i\lambda Q_{\mathrm{B}}, c(x)]=0 \qquad \Longrightarrow [i\lambda Q_{\mathrm{B}}, c^{\mathrm{as}}(x)]=0, \tag{27}$$

$$[i\lambda Q_{\mathrm{B}}, \bar{c}(x)]=i\lambda B(x) \Longrightarrow [i\lambda Q_{\mathrm{B}}, \bar{c}^{\mathrm{as}}(x)]=i\lambda Z_{\mathrm{B}}^{1/2} B^{\mathrm{as}}(x). \tag{28}$$

以上の BRS 変換則により，有質量の $U_\mu^{\mathrm{as}}, \phi^{\mathrm{as}}$ は BRS 1 重項の物理的粒子，零質量の $(\chi^{\mathrm{as}}, c^{\mathrm{as}})$ と $(\bar{c}^{\mathrm{as}}, B^{\mathrm{as}})$ がそれぞれ BRS 2 重項，すなわち全部で BRS 4 重項，の非物理的モードとなることがわかった。結局，普通の共変ゲージでは，確かに南部-Goldstone 定理の予言通り，NG ボソン χ^{as} が現れるのだけれど，それは BRS 4 重項に属し，それゆえ，**5** 章で一般的に証明した 4 重項機構により，$Q_{\mathrm{B}}|\mathrm{phys}\rangle=0$ で指定される物理的空間 $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ には有限確率では現れ得ない，ということになる。

次に R_ξ ゲージの場合を手短に考察しよう。この場合の自由項 Lagrangian $\mathcal{L}_0^{R_\xi}$ は，(12) の第 1 行と (16) の $\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}^{R_\xi}$ の和である：

$$\mathcal{L}_0^{R_\xi}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2+\frac{1}{2}M^2A_\mu^2-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2+\frac{1}{2}[(\partial_\mu\chi)^2-\alpha M^2\chi^2]$$
$$+\frac{1}{2}[(\partial_\mu\phi)^2-m^2\phi^2]+i\bar{c}(\Box+\alpha M^2)c. \tag{29}$$

ここでは χ の質量項を明確にするため，(15) の NL 場 B を，運動方程式

$$-\alpha B=\partial^\mu A_\mu+\alpha M\chi \tag{30}$$

を既に使って消去した形を書いたが，もちろん残しておいても話は同じである。今度の場合，“NG ボソン” の場 χ が αM^2 の 2 乗質量を持つようになったことに注意しよう。すなわち零質量の NG ボソンは ($\alpha\neq 0$ では) 現れない。しかし，これは南部-Goldstone の定理に反しているわけではない。なぜなら，R_ξ ゲージはゲージ固定項の中に複素場 φ の特定の成分 χ を $\alpha M\chi$ の形で含んでいるため，既に (大局的) $U(1)$ 対称性を破っているからである。

R_ξ ゲージの場合，(29) の $\mathcal{L}_0$ から推察されるように，χ^{as} と c^{as} と $\bar{c}^{\mathrm{as}}$

---

† これは $c(x)$ が相互作用をしない今の場合は自明だが，そうでない場合でも，χ は，$A_\mu, c, \bar{c}$ と共に荷電共役で奇 (-1) の場であるので，$c(x)\chi(x)$ は荷電共役偶でゴースト数 $+1$ の量子数を持ち，そのような粒子は $\mathcal{L}_0$ に存在しないので，摂動論の範囲では漸近場が存在しないといえる。

と，それに B^{as} が共通の 2 乗質量 αM^2 を持った BRS 4 重項となる。このことは，上の BRS 変換則 (26) と (28) がゲージによらないことから明らかである。B を消去した形で B^{as} というのは (30) の右辺 $\partial^\mu A_\mu+\alpha M\chi$ の含む漸近場のことである。実際，A_μ が 2 乗質量 αM^2 の B^{as} (や χ^{as}) を含むことは，(29) の $\mathcal{L}_0$ から決まる A_μ の伝播関数を計算してみればわかる：

$$
\begin{aligned}
i\,\mathrm{F.T.}\langle 0|\mathrm{T}A_\mu A_\nu|0\rangle &= [g_{\mu\nu}(p^2-M^2)-p_\mu p_\nu(1-\alpha^{-1})]^{-1} \\
&= \frac{g_{\mu\nu}-(1-\alpha)p_\mu p_\nu/(p^2-\alpha M^2)}{p^2-M^2} \\
&= \frac{g_{\mu\nu}-p_\mu p_\nu/M^2}{p^2-M^2}+\frac{p_\mu p_\nu}{M^2}\frac{1}{p^2-\alpha M^2}. \qquad (31)
\end{aligned}
$$

最後の表式で，第 1 項の質量 M の Proca 場の伝播関数と共に，確かにスカラー部分 ∂A に相当する $p_\mu p_\nu$ 比例項 (第 2 項) に $(p^2-\alpha M^2)^{-1}$ の pole が現れている。したがって R_ξ ゲージでも，普通の共変ゲージと同じく，χ^{as}, c^{as}, $\bar{c}^{\mathrm{as}}$, B^{as} が BRS 4 重項となり観測されず，質量 M の Proca 場 U_μ^{as} と質量 m の Higgs 粒子 ϕ^{as} のみが物理的粒子となる。

R_ξ ゲージで，ゲージ・パラメータ α を無限に大きくすると，BRS 4 重項に属する $\chi, c, \bar{c}, B$ の場は無限に大きな質量を持つようになり，形式的にすべての Feynman グラフから抜け落ちる。この形式的極限 $\chi=B=c=\bar{c}=0$ で，R_ξ ゲージの Lagrangian (12)+(16) が，初めに議論したユニタリー・ゲージの Lagrangian (8) に帰着することに注意しておこう。実際の摂動計算は，$\alpha=1$ の R_ξ ゲージが最も簡単で，その場合，ゲージ場の伝播関数 (31) は簡明な $g_{\mu\nu}/(p^2-M^2)$ となる。これは R_ξ ゲージ以前に 't Hooft により与えられたもので 't Hooft-Feynman ゲージと呼ばれる。

$SU(2)$ Higgs-Kibble 模型　ゲージ群が可換群 $U(1)$ の場合でなくとも本質的に同じ現象が起こる。ここでは最も簡単な非可換群の場合の例として，いわゆる $SU(2)$ Higgs-Kibble 模型を見ておこう。その Lagrangian は，先の Higgs 模型の複素場 φ を $SU(2)$ 2 重項複素場 $\Phi=(\Phi_1, \Phi_2)^T$ に，電磁場 A_μ を $SU(2)$ 3 重項 Yang-Mills 場 $\sum_{a=1}^{3} A_\mu^a \tau^a/2$ (τ^a：Pauli 行列) に，それぞれ置き換えたもので与えられる：

$$
\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}+(D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi+\mu^2\Phi^\dagger\Phi-\frac{\lambda}{2}(\Phi^\dagger\Phi)^2, \qquad (32)
$$

$$
F_{\mu\nu}^a\equiv\partial_\mu A_\nu^a-\partial_\nu A_\mu^a+g\epsilon_{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \qquad D_\mu\Phi\equiv(\partial_\mu-\frac{i}{2}g\tau^a A_\mu^a)\Phi. \qquad (33)
$$

$\varPhi$ は Higgs 2 重項 (Higgs doublet) と呼ばれる。この場合も，Higgs 模型と同様，tree レベルで $\langle\varPhi^\dagger\rangle\langle\varPhi\rangle=v^2/2=\mu^2/\lambda$ の真空期待値を生じるから，場のシフトをする。't Hooft に従って Higgs 2 重項場 $\varPhi$ に対し次のパラメトリゼーションをとろう：

$$\begin{aligned}\varPhi(x)&=\frac{1}{\sqrt{2}}[v+\psi(x)+i\chi^a(x)\tau^a]\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\chi^2(x)+i\chi^1(x)\\v+\psi(x)-i\chi^3(x)\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{34}$$

ψ, $\vec{\chi}\equiv(\chi^1,\chi^2,\chi^3)$ はそれぞれ実スカラー場である。(34) を代入して計算すれば，(32) の Lagrangian は次の表式になる：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&-\frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}\cdot\vec{F}^{\mu\nu}+\frac{1}{2}M^2(\vec{A}_\mu-M^{-1}\partial_\mu\vec{\chi})^2+\frac{1}{2}[(\partial_\mu\psi)^2-m^2\psi^2]\\&+\frac{g}{2}\vec{A}_\mu\cdot(\vec{\chi}\partial_\mu\psi-\psi\partial_\mu\vec{\chi}+\vec{\chi}\times\partial_\mu\vec{\chi})-\frac{1}{2}m\sqrt{\lambda}\,\psi(\psi^2+\vec{\chi}^2)\\&+\frac{g}{2}M\vec{A}_\mu{}^2\psi+\frac{g^2}{8}\vec{A}_\mu{}^2(\psi^2+\vec{\chi}^2)-\frac{\lambda}{8}(\psi^2+\vec{\chi}^2)^2-V_0(v).\end{aligned}\tag{35}$$

ただし矢印を付けた量は $SU(2)$ 3 重項，例えば $\vec{A}_\mu=(A^1_\mu,A^2_\mu,A^3_\mu)$，を表し，

$$M=\frac{g}{2}v=|\mu|\sqrt{\frac{g^2}{2\lambda}}$$

と置いた。(35) の表式は $e=g/2$ とすれば，Higgs 模型の (12) とほぼ完全に類似的である。類似が壊される唯一の項 $(g/2)\vec{A}_\mu\cdot(\vec{\chi}\times\partial_\mu\vec{\chi})$ は，$\vec{\chi}$ の運動項 $(1/2)(\partial_\mu\vec{\chi})^2$ と一緒にすれば

$$\frac{1}{2}\partial^\mu\vec{\chi}\cdot(\partial_\mu\vec{\chi}+g\vec{A}_\mu\times\vec{\chi})\equiv\frac{1}{2}\partial^\mu\vec{\chi}\cdot D_\mu\vec{\chi}\tag{36}$$

と書ける。この形は下の FP ゴースト運動項との対応でおもしろい。

$\varPhi$ のゲージ変換が $\delta\varPhi=ig\theta^a(\tau^a/2)\varPhi$ だから，(34) の成分場 $\psi,\vec{\chi}$ の BRS 変換は，$\theta^a(x)$ を FP ゴースト場 $c^a(x)$ に置き換える規則で，

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\psi(x)=[iQ_{\mathrm{B}},\psi(x)]=-\frac{g}{2}\vec{\chi}(x)\cdot\vec{c}(x),\tag{37}$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\vec{\chi}(x)=[iQ_{\mathrm{B}},\vec{\chi}(x)]=\frac{g}{2}[(v+\psi(x))\,\vec{c}(x)+\vec{\chi}(x)\times\vec{c}(x)]\tag{38}$$

となる。(15) に対応する，この場合の R_ξ ゲージのゲージ固定＋FP ゴースト Lagrangian は，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}^{R_\xi}=-i\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\left[\vec{\bar{c}}\cdot\left(\partial^\mu\vec{A}_\mu+\alpha M\vec{\chi}+\frac{1}{2}\alpha\vec{B}\right)\right]$$
$$=\vec{B}\cdot(\partial^\mu\vec{A}_\mu+\alpha M\vec{\chi})+\frac{1}{2}\alpha\vec{B}^2$$
$$+i\vec{\bar{c}}\cdot\left[\partial^\mu D_\mu+\alpha M^2+\frac{g}{2}\alpha M(\psi+\vec{\chi}\times)\right]\vec{c}. \qquad (39)$$

もちろん $D_\mu\vec{c}=\partial_\mu\vec{c}+g\vec{A}_\mu\times\vec{c}$ である。普通の (大局的 $SU(2)$ を壊さない) 共変ゲージの $\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}$ は，この式で $M=0$ としたもので与えられる。

この $SU(2)$ Higgs-Kibble 模型では，真空期待値 $\langle 0|\Phi|0\rangle=\frac{v}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ が大局的 $G=SU(2)$ 対称性を完全に破っているので，$\dim G=3$ 個の NG ボソンが現れ，それが $\vec{\chi}=(\chi^1,\chi^2,\chi^3)$ 場に対応する。BRS 変換 (38) および $[iQ_{\mathrm{B}},\vec{\bar{c}}(x)]=i\vec{B}(x)$ の $x_0\to\pm\infty$ の極限より

$$[iQ_{\mathrm{B}},\vec{\chi}^{\mathrm{as}}(x)]=(Ma^{-1})\vec{c}^{\mathrm{as}}(x) \qquad (a\text{：定数}) \qquad (40)$$
$$[iQ_{\mathrm{B}},\vec{\bar{c}}^{\mathrm{as}}(x)]=(\tilde{Z}_3^{-1}Z_B)^{1/2}\vec{B}^{\mathrm{as}}(x) \qquad (41)$$

が従うから，再び $(\vec{\chi}^{\mathrm{as}},\vec{c}^{\mathrm{as}},\vec{\bar{c}}^{\mathrm{as}},\vec{B}^{\mathrm{as}})$ が (3 組の) BRS 4 重項となり，物理的空間 $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ に有限確率では出てこれない非物理的モードとなる。物理的モードは，質量 M の Proca 場 $\vec{U}_\mu$ と質量 m の Higgs 粒子 ψ とである。これらは，先の Higgs 模型と形式的に全く同じである。

もとの大局的 $SU(2)$ 不変性が完全に壊れたのに，壊れた後の Lagrangian (35)+(39) がまだ，ゲージ場 $\vec{A}_\mu$ および BRS 4 重項 $(\vec{\chi},\vec{c},\vec{\bar{c}},\vec{B})$ を "$SU(2)$" 3 重項とする，"$SU(2)$" 対称性を持っているように見えるのをいぶかる読者がいるかもしれない。確かにこの "$SU(2)$" 対称性が存在するが，これは，もとの大局的 $SU(2)$ [ゲージ変換パラメータ $\theta^a(x)$ を x 非依存にしたもの] とは別物であることに注意しなければならない。$SU(2)$ Higgs-Kibble 模型は，この点でかなり特殊で，実は，もとの大局的 $SU(2)$ 以外にもう一つ $SU(2)$ 対称性，$SU(2)'$ と呼ぼう，を持っているのである。まず $SU(2)$ の $\mathbf{2}^*$ 表現は $\mathbf{2}$ 表現と同値であって，

$$\tilde{\Phi}\equiv i\tau_2\Phi^* \qquad (42)$$

がもとの 2 重項場 Φ と全く同じ $SU(2)$ 変換性を持つことを思い起こそう。この $SU(2)$ $\mathbf{2}$ 表現の特殊性のために，2×2 行列のスカラー場

$$\boldsymbol{\Phi}\equiv(\tilde{\Phi},\Phi)=\begin{pmatrix}\Phi_2^* & \Phi_1\\ -\Phi_1^* & \Phi_2\end{pmatrix} \qquad (43)$$

を定義すれば，(32) の $SU(2)$ Higgs-Kibble Lagrangian を

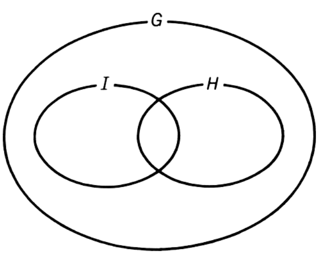
$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}\cdot\vec{F}^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[(D_\mu\boldsymbol{\Phi})^\dagger D^\mu\boldsymbol{\Phi}+\mu^2\boldsymbol{\Phi}^\dagger\boldsymbol{\Phi}]-\frac{\lambda}{2}\left[\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Phi}^\dagger\boldsymbol{\Phi})\right]^2 \tag{44}$$

と書き直すことができる。この形では

$$\boldsymbol{\Phi}(x) \longrightarrow \boldsymbol{\Phi}'(x)=U\boldsymbol{\Phi}(x)U'^{-1}, \qquad U\in SU(2),\ U'\in SU(2)'$$

の変換に対して不変であることが明白で，左からの変換 U がもとの大局的 $SU(2)$ で，右からの変換 U' がもう一つの隠れた $SU(2)'$ である。(この $SU(2)'$ は custodial symmetry と呼ばれている。) $\boldsymbol{\Phi}$ が上述の真空期待値を持つと $\langle 0|\boldsymbol{\Phi}|0\rangle=(v/\sqrt{2})\mathbf{1}$ となり，$SU(2)$ も $SU(2)'$ も壊されるが，両者で等しい角度の変換を同時に行う $SU(2)_{対角}$ は破れずに残る。上で見つけた“$SU(2)$”対称性はこの $SU(2)_{対角}$ なのである。すなわち，この模型は，大局的対称性が $G=SU(2)\times SU(2)'\simeq SO(4)$ で，そのうち $SU(2)$ がゲージ化されており，G が $SU(2)_{対角}$ へ自発的に破れを起こす模型であったわけである。

一般の場合 大局的対称性が $G=G_1\times G_2\times\cdots$ (G_i：単純群または $U(1)$ 群) となる一般の場合，その因子群 G_i のいくつかの直積で与えられる部分群 $I=G_{i_1}\times G_{i_2}\times\cdots$ だけがゲージ化されていても G 対称性と矛盾しない。その場合，G が自発的にある部分群 H に破れたとすると，一般にその包含関係は 6·10 図のようになるだろう。このとき，次のことが今までの話から明らかである：$G-(I\cup H)$ の部分の生成子に対応した NG ボソンは物理的零質量粒子になり，$I-(I\cap H)$ の部分の NG ボソンは非物理的粒子となる。また，少なくとも摂動論の範囲では，$I-(I\cap H)$ のゲージ・ボソンは (NG ボソンを吸収して) 有質量ベクトル場となり，$I\cap H$ のゲージ・ボソンは零質量にとどまる。



6·10 図

6-6 Higgs 現象逆定理とカラー閉じ込め

カラー電荷 Q^a に対応する大局的ゲージ不変性が自発的に破れたときには，現れる NG ボソンは非物理的粒子となり，かつ対応するゲージ場 A_μ^a は有質量ベクトル粒子 U_μ^a を記述するようになる，ということが前節で示した Higgs 現象である。しかし，この主張の後半部，「有質量ベクトル粒子が現れる」という部分は，摂動論の枠内での議論であり，また模型に依存する話であることは認識しておく必要がある。

ところが，この命題の逆に関しては，摂動論にも模型の詳細にもよらずかなり一般的な主張をすることができる。すなわち，系のダイナミクスがある“条件”を満たせば，逆命題「ゲージ場 A_μ^a が有質量となれば，カラー電荷 Q^a の大局的ゲージ不変性は自発的に破れている」の成立することが示せる。しかも，このときの“条件”が満たされない場合というのが，クォークやグルーオンなどカラーを持った粒子が一般に物理的粒子として現れない，いわゆる，**カラー閉じ込め** (color confinement) の実現している相に対応している，ことが示せる。

Higgs 現象の逆定理　ここでは，カラー対称性 (大局的ゲージ不変性) を尊重する普通の共変ゲージをとった，**5-5** (1) の Lagrangian $\widetilde{\mathcal{L}}$ を持つような一般的非可換ゲージ理論の系を考察する。そのとき，カラー対称性に対応する保存 Noether カレント J_μ^a は，**5-5** (56) で与えられ，**5-5** (58) の“Maxwell”方程式

$$gJ_\mu^a = \partial^\nu F_{\mu\nu}^a + \{Q_{\rm B}, D_\mu \bar{c}^a\} \qquad (1)$$

を満たす，ということが重要である。この方程式に現れる 3 項が別々に保存するという点にも注意する：

$$\partial^\mu J_\mu^a = \partial^\mu (\partial^\nu F_{\mu\nu}^a) = \partial^\mu \{Q_{\rm B}, D_\mu \bar{c}^a\} = 0. \qquad (2)$$

6-1 で説明したことから，一般に，保存するカレント j_μ から電荷 $Q = \int d^3x\, j_{\mu=0}(x)$ が定義できるかどうかに関して，次の諸条件が互いに等価であることがわかる：†

† この等価性は，公理論的立場からもっと厳密に証明することもできるが，ここでは **6-1** の説明でよしとしておく。

i) $Q=\int d^3x\, j_0(x)$ が well-defined な電荷演算子として存在する。

ii) Q の対称性が自発的に破れていない；$Q|0\rangle=0$.

iii) カレント $j_\mu(x)$ が零質量1粒子スペクトルを含まない；すなわち $^\forall|\boldsymbol{p}(m=0)\rangle$（零質量1粒子状態）に対し

$$\langle 0|j_\mu(x)|\boldsymbol{p}(m=0)\rangle=0. \tag{3}$$

このことから，今問題にしているカラー対称性の電荷 Q^a が well-defined なものとして存在するかどうかは，そのカレント J_μ^a が零質量1粒子スペクトルを含むかどうかにより決まることがわかるが，実は，ゲージ理論の場合，上の Noether カレント J_μ^a には**ほとんど常に**零質量1粒子状態が含まれている！ まずこのことを示そう。実際，**5-9** (26)〜(31) で，我々は，ゲージ理論では常に，ゲージ群 G の添字 a の各々に対して必ず零質量の BRS 4 重項粒子——素 4 重項——が存在し，Heisenberg 場 A_μ^a, B^a, $D_\mu c^a$, $\bar{c}^a$ の中に

$$\begin{aligned} A_\mu^a(x) &\underset{x_0\to\pm\infty}{\longrightarrow} \partial_\mu\chi^a(x)+\cdots, & B^a(x) &\longrightarrow \beta^a(x)+\cdots, \\ D_\mu c^a(x) &\longrightarrow \partial_\mu\gamma^a(x)+\cdots, & \bar{c}^a(x) &\longrightarrow \bar{\gamma}^a(x)+\cdots, \end{aligned} \tag{4}$$

の形で含まれることを示した。その BRS 変換性は

$$[iQ_{\rm B}, \chi^a(x)]=\gamma^a(x), \qquad \{iQ_{\rm B}, \bar{\gamma}^a(x)\}=i\beta^a(x) \tag{5}$$

であった。そうすれば，一般に，“Maxwell” 方程式 (1) の右辺第2項の中の Heisenberg 演算子 $D_\mu\bar{c}^a(x)$ も，ある重みで素4重項メンバー $\bar{\gamma}^a(x)$ を含む：

$$D_\mu\bar{c}^a(x) \longrightarrow (\mathbf{1}+u)^a{}_b\,\partial_\mu\bar{\gamma}^b(x)+\cdots. \tag{6}$$

ここで，$\mathbf{1}^a{}_b=\delta^a{}_b$ は $D_\mu\bar{c}^a=\partial_\mu\bar{c}^a+g(A_\mu\times\bar{c})^a$ の第1項 $\partial_\mu\bar{c}^a$ からの寄与で，行列 $u^a{}_b$ は第2項からの寄与に対応する：

$$g(A_\mu\times\bar{c})^a(x) \longrightarrow u^a{}_b\,\partial_\mu\bar{\gamma}^b(x)+\cdots. \tag{7}$$

係数行列 $u^a{}_b$ は具体的には，(4) と **5-9** (26) より

$$\begin{aligned} \text{F.T.}\langle 0|\mathrm{T}\, D_\mu c^a(x)\,\bar{c}^b(y)|0\rangle &= i\delta^{ab}\frac{p_\mu}{p^2} \\ &= \text{F.T.}\langle 0|\mathrm{T}\,\partial_\mu\gamma^a(x)\,\bar{\gamma}^b(y)|0\rangle \end{aligned} \tag{8}$$

であることを考慮すれば，次の Green 関数†

---

† (9) は**4-3** で述べた Lorentz 共変な T* 積である。この場合 FP ゴーストの運動方程式 $\partial^\mu D_\mu c^a=0$ より，(9) の Green 関数が $(g_{\mu\nu}-p_\mu p_\nu/p^2)$ に比例することが従う。（演習問題 6.8）

$$\text{F.T.}\langle 0|\mathrm{T}\, D_\mu c^a(x)\, g(A_\nu \times \bar{c})^b(y)|0\rangle = \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) u^a{}_b(p^2) \qquad (9)$$

の $-p_\mu p_\nu/p^2$ pole の留数 $u^a{}_b(p^2=0)$ で与えられることがわかる。($u^a{}_b$ は，カラー対称性が自発的に破れていなければもちろん対角的で $u^a{}_b = u\delta^a{}_b$ の形をとる。) (6) に戻ろう。一方 (5) は，$\bar{\gamma}^a(x)$ が BRS 親粒子であることを示しているから，

$$\{Q_\mathrm{B}, D_\mu \bar{c}^a(x)\} \longrightarrow (\mathbf{1}+u)^a{}_b\, \partial_\mu \beta^b(x) + \cdots \qquad (10)$$

が従い，“Maxwell” 方程式 (1) の中の演算子 $\{Q_\mathrm{B}, D_\mu \bar{c}^a\}$ には，実際，零質量 1 粒子 $\beta^b(x)$ が重み $(\mathbf{1}+u)$ で効いていることがわかる。“Maxwell” 方程式 (1) が結びつける Heisenberg 演算子 $J^a_\mu, \partial^\nu F^a_{\mu\nu}, \{Q_\mathrm{B}, D_\mu \bar{c}^a\}$ は，もちろん，皆同じ量子数を持つ演算子であるから，$\{Q_\mathrm{B}, D_\mu \bar{c}^a\}$ に存在している零質量 1 粒子状態 $\partial_\mu \beta^b(x)$ は，一般に(特殊な理由がない限り) J^a_μ にも $\partial^\nu F^a_{\mu\nu}$ にも 0 でない重みで含まれる：

$$J^a_\mu(x) \longrightarrow v^a{}_b\, \partial_\mu \beta^b(x) + \cdots. \qquad (11)$$

$$\partial^\nu F^a_{\mu\nu}(x) \longrightarrow w^a{}_b\, \partial_\mu \beta^b(x) + \cdots. \qquad (12)$$

このとき，“Maxwell” 方程式 (1) は係数行列 $v, w, \mathbf{1}+u$ の間に

$$g v^a{}_b = w^a{}_b + (\mathbf{1}+u)^a{}_b \qquad (13)$$

の関係式が成立することをいう。結局，Noether カレント J^a_μ には，たまたま $\{Q_\mathrm{B}, D_\mu \bar{c}^a\}$ の寄与 $(\mathbf{1}+u)$ と $\partial^\nu F^a_{\mu\nu}$ の寄与 w とが相殺しない限り必ず零質量 1 粒子状態 $\partial_\mu \beta^b$ が寄与していることがわかった。

そうすれば，この事実は，カラー対称性がほとんど常に自発的に破れていることを意味するのか？　しかし，これは明らかに馬鹿げた結論である。このパズルを解く鍵は，すでに **1-3** で述べた Noether カレントの定義の不定性にある：Noether の定理で導かれるカレント j_μ には，常に，局所的反対称テンソル $f_{[\mu\nu]}(x)$ の発散 $\partial^\nu f_{[\mu\nu]}$ を付け加える不定性が存在し，保存則 $\partial^\mu(j_\mu + \partial^\nu f_{[\mu\nu]}) = 0$ も，電荷がもとの変換を生成するという性質

$$\int d^3x\, i[j_0(x) + \partial^k f_{[0k]}(x), \phi(y)] = \delta\phi(y) \qquad (14)$$

も，共に不定項 $\partial^\nu f_{[\mu\nu]}$ によらず成立した。実際，(14) では $\int d^3x$ 積分をする前に交換関係を計算しているので，$[\partial^k f_{[0k]}(x), \phi(y)]$ は $x=y$ 近傍のみに台を持つ空間全微分項であり，その積分は 0 となる。しかし，交換関係をとる前に 3 次元積分

$$Q=\int d^3x\,[j_0(x)+\partial^k f_{[0k]}(x)] \tag{15}$$

が存在して，well-defined な Q を与えるかどうかという今の問題に対しては，もはや，$\partial^\nu f_{[\mu\nu]}$ は全くの不定項というわけではなくなる。むしろ，積分 (15) が存在するように $f_{[\mu\nu]}$ を選ぶべしという制限が付くことになる。すなわち，初めにとったカレント $j_\mu(x)$ に零質量 1 粒子状態の寄与がある場合は，その 1 粒子状態を $\partial^\nu f_{[\mu\nu]}$ の項からの寄与がちょうど相殺するよう $f_{[\mu\nu]}$ を選ばなくてはならない。このとき，$f_{[\mu\nu]}$ をどう選んでも $\partial^\nu f_{[\mu\nu]}$ にはその零質量 1 粒子状態が効き得ず，それゆえ，$j_\mu(x)$ の中のそれを相殺することができない，という場合がある。この場合が実際に対称性が自発的に破れている場合に対応するのである。

今のカラー対称性の場合には，**5-5** (56) で与えた Noether のカラー・カレント J^a_μ は，一般に，$\{Q_B, D_\mu\bar{c}^a\}$ や $\partial^\nu F^a_{\mu\nu}$ と同じく，素 4 重項メンバーの零質量粒子 $\beta^b(x)$ の寄与を (11) の形で実際に含んでいる。それで上の一般的議論から，もしある添字 a のカラー対称性が本当に自発的破れを起こしていないのであれば，ある局所的反対称テンソル $f^a_{[\mu\nu]}(x)$ が存在して，$\partial^\nu f^a_{[\mu\nu]}(x)$ の中の零質量粒子 $\beta^b(x)$ の寄与が J^a_μ 中のそれを相殺し，したがって

$$Q^a=\int d^3x\,[J^a_0(x)+\partial^k f^a_{[0k]}(x)] \tag{16}$$

が well-defined なカラー電荷演算子を与える，ということになる。このことは，実際，例えば群 G のすべてのカラー対称性が破れていない場合には，(10)〜(12) の係数行列 $u^a{}_b, v^a{}_b, w^a{}_b$ は皆対角行列 $u\delta^a_b, v\delta^a_b, w\delta^a_b$ で，(16) の $f^a_{[\mu\nu]}$ は Yang-Mills 場の場の強さ $F^a_{\mu\nu}$ に比例した形の

$$f^a_{[\mu\nu]}(x)=-\omega F^a_{\mu\nu}(x), \qquad \omega=v/w \tag{17}$$

にとっておけばよい。もちろん，場の強さ $F^a_{\mu\nu}$ の代わりに，それと同じ量子数を持った $\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu$, あるいは $(A_\mu\times A_\nu)^a$ を使っても，$\partial_\mu\beta^a$ の寄与があるはずで適当な係数を掛けておけば，かまわない。

さて，今や Higgs 現象の逆定理を与える準備が整った。

[定理] $\det(\mathbf{1}+u)\neq 0$ の条件が成立する限り，群 G のゲージ場 $A^a_\mu(x)$ のうち，その漸近場のベクトル粒子が 0 でない質量を得た (あるいは，もっと一般に，零質量ベクトル粒子がなくなった) チャネル分だけ，カラー対称性は破れている。

(証明) ゲージ場 $A^a_\mu(x)$ のうち，零質量ベクトル漸近場が存在しないチャネルの群の添字 a を α, β で，存在するチャネルのそれを $\hat{a}, \hat{b}$ で，それぞれ表そう。そうすれば，添字 α の Heisenberg 場 $A^\alpha_\mu(x)$ は $x_0 \to \pm\infty$ で

$$A^\alpha_\mu(x) \longrightarrow \partial_\mu \chi^\alpha(x) + z^\alpha{}_A U^A_\mu(x) + \cdots \qquad (z^\alpha{}_A：係数) \qquad (18)$$

となる。$\chi^\alpha(x)$ は (4) で与えた必ず存在する零質量素 4 重項メンバーで，$U^A_\mu(x)$ は存在してもよい有質量ベクトル粒子固有状態の Proca 場，点々 $(\cdots)$ は他に存在するかもしれない今無関係な有質量粒子漸近場をそれぞれ表す。ここで重要な点は，このチャネルの素 4 重項メンバー $\chi^\alpha(x)$ は [したがって，そのパートナー $\beta^\alpha(x)$] もスカラー粒子だということである。スカラーである $\chi^\alpha(x)$ [や $\beta^\alpha(x)$] は，$\partial_\mu(\partial_\nu \chi^\alpha) - \partial_\nu(\partial_\mu \chi^\alpha) = 0$ であるから，$F^\alpha_{\mu\nu}(x)$ であろうが，$\partial_\mu A^\alpha_\nu - \partial_\nu A^\alpha_\mu$ や $(A_\mu \times A_\nu)^\alpha$ であろうが，任意の反対称テンソル局所場 $f_{[\mu\nu]}(x)$ に対し，決して，その零質量漸近場として寄与できない。したがって，Noether カレントの不定項 $\partial^\nu f_{[\mu\nu]}(x)$ にも，そのようなスカラーの $\chi^\alpha(x)$, $\beta^\alpha(x)$ 成分は現れ得ない。

これに反して，もし零質量ベクトル粒子の漸近場が存在するチャネル $A^{\hat{a}}_\mu(x)$ ならば，前にも少し触れたように，$\chi^{\hat{a}}(x)$ はスカラー場ではなく，$A^{\hat{a}}_\mu(x)$ の零質量ベクトル漸近場 $a^{\hat{a}}_\mu(x)$ の縦波モードである。このとき $a^{\hat{a}}_\mu(x)$ のスカラー・モードが $\beta^{\hat{a}}(x)$ で，一般に $\partial_\mu(\partial^\nu a^{\hat{a}}_\nu) \propto \Box a^{\hat{a}}_\mu \propto \partial_\mu \beta^{\hat{a}}$ となる。そうすれば，$a^{\hat{a}}_\mu$ は，$F^{\hat{a}}_{\mu\nu}$ のような反対称テンソル場 $f_{[\mu\nu]}$ に対し，一般に

$$f_{[\mu\nu]}(x) \underset{x_0 \to \pm\infty}{\longrightarrow} c_{\hat{a}}(\partial_\mu a^{\hat{a}}_\nu(x) - \partial_\nu a^{\hat{a}}_\mu(x)) + \cdots \qquad (c_{\hat{a}}：係数) \qquad (19)$$

の形で寄与できて，それゆえ不定項 $\partial^\nu f_{[\mu\nu]}(x)$ にも

$$\partial^\nu f_{[\mu\nu]}(x) \longrightarrow c_{\hat{a}}[\partial_\mu(\partial^\nu a^{\hat{a}}_\nu) - \Box a^{\hat{a}}_\mu] + \cdots = c'_{\hat{a}} \partial_\mu \beta^{\hat{a}} + \cdots \qquad (20)$$

のように，零質量素 4 重項 1 粒子状態 $\beta^{\hat{a}}$ が寄与することになる。

すなわち，任意の反対称テンソル場 $f_{[\mu\nu]}$ の発散 $\partial^\nu f_{[\mu\nu]}$ に効き得る零質量 1 粒子 $\beta^{\hat{a}}$ は，零質量ベクトル粒子 $a^{\hat{a}}_\mu$ の存在するチャネル $\hat{a}$ のもののみとなり，零質量ベクトル粒子のなくなったチャネル α の β^α は現れない。このことは，特に，場の強さ $F^a_{\mu\nu}$ に対しても当てはまるから，任意の a に対し $\partial^\nu F^a_{\mu\nu}$ は 1 粒子項 $\partial_\mu \beta^\alpha$ の寄与を持たない。すなわち，(12) の係数 $w^a{}_b$ は，$^\forall a$ に対し $w^a{}_\beta = 0$ である。ところが，$w^a{}_\beta = 0$ ならば，“Maxwell” 方程式の導く関係式 (13) より $gv^a{}_\beta = (1+u)^a{}_\beta$ が従い，$\det(1+u) \neq 0$ の仮定から，$v^a{}_\beta \neq 0$ となる独立なチャネル a が β の個数だけ，すなわち零質量

ベクトル粒子のなくなったチャネルの個数だけ，存在することがわかる。すなわち，この個数を n とすれば，Noether カレント J_μ^a から適当な n 個 $J_\mu^\alpha\,(\alpha=1,\cdots,n)$ を持ってきて，

$$J_\mu^\alpha(x) \longrightarrow v^\alpha{}_\beta\,\partial_\mu\beta^\beta(x)+v^\alpha{}_{\bar{b}}\,\partial_\mu\beta^{\bar{b}}(x)+\cdots,\qquad \det_{n\times n}(v^\alpha{}_\beta)\neq 0, \tag{21}$$

となるということである。しかし，この零質量1粒子項 $\partial_\mu\beta^\beta(x)$ は，上でいったように，任意の反対称テンソルの発散 $\partial^\nu f_{[\mu\nu]}$ に現れ得ない成分であるから，Noether カレントの不定項で相殺することはできず，したがって，(21) の n 個のカラー・カレント J_μ^α に対応するカラー対称性は自発的に破れている。(証明終)

この定理に関しコメントを二,三加えておこう：

i） この自発的対称性の破れに対応する n 個の NG ボソンは，スカラーの素4重項メンバー χ^a である；実際 (21) と **5-9** (30) より

$$\langle 0|[J_\mu^\alpha(x),\chi^\beta(y)]|0\rangle = iv^\alpha{}_\beta\,\partial_\mu D(x-y) \tag{22}$$

が従うことから納得されよう。例えば前節の $SU(2)$ Higgs-Kibble 模型の例では，(Higgs 模型の **6-5** (21) に対応した式より)†

$$A_\mu^a(x) \longrightarrow M^{-1}a\partial_\mu\chi^{a,\mathrm{as}}(x)+M^{-2}b\partial_\mu B^{a,\mathrm{as}}(x)+Z_3^{1/2}\,U_\mu^{a,\mathrm{as}}(x), \tag{23}$$

$$\chi_H^a(x) \longrightarrow Z_\chi^{1/2}\,\chi^{a,\mathrm{as}}(x),\qquad B^a(x) \longrightarrow Z_B^{1/2}\,B^{a,\mathrm{as}}(x)=\beta^a(x) \tag{24}$$

であったから，(4) の第1式と (23) を比較して，素4重項メンバー χ^a は

$$\chi^a(x)=M^{-1}a\,\chi^{a,\mathrm{as}}(x)+M^{-2}b\,B^{a,\mathrm{as}}(x) \tag{25}$$

と同定でき，確かに Higgs 2重項の NG 場成分 $\chi_H^a(x)$ の漸近場 $\chi^{a,\mathrm{as}}(x)$ と本質的に同じであることがわかる。[$\chi^a(x)$ に BRS 子供成分 $\beta^a(x)\propto B^{a,\mathrm{as}}(x)$ が混じっていることは，χ^a の，BRS 変換性や β^b との交換関係を変えないので重要でない。]

ii） 上の定理の条件 $\det(\mathbf{1}+u)\neq 0$ は，QED など，可換群 $[U(1)]^k$ に基づくゲージ理論の場合，構造定数 f_{abc} が 0 であるから $A_\mu\times\bar{c}=0$ で，(7) の定義式より $u\equiv 0$ となり，恒等的に満たされる。また $u^a{}_b=O(g)=O(\hbar)$ であるから，非可換ゲージ理論の場合でも，摂動論の枠内では (摂動論が妥当な限り) 常に満足される。

iii） この定理にとっては，零質量ベクトル粒子の漸近場がなくなることのみが重要で，できた有質量ベクトル粒子の質量が群 G の多重項内で縮退

---

† Higgs 2重項の NG 場成分 $\chi^a(x)$ には，素4重項メンバー $\chi^a(x)$ (漸近場) と区別するため，ここでは H (Heisenberg 場) の添字をつけ，$\chi_H^a(x)$ と記した。

していようがいまいが，大局的ゲージ対称性が必ず破れていることを証明している。

カラー閉じ込め 5-1で説明したように，QCDにおいて，クォークやグルーオンなど，すべてカラーを持った粒子（大局的ゲージ対称性Gの1重項でないもの）は，最終的には物理的粒子として現れないと予想されており，これをカラー閉じ込めと呼んだ。上のHiggs現象逆定理でおいた条件$\det(1+u)\neq 0$が成立しない場合，すなわち$\det(1+u)=0$となる場合，というのは，実は，大変重要な場合で，まさにこのカラー閉じ込めを実現する一つの充分条件を与える。以下，簡単のため，$u^a{}_b\propto\delta^a{}_b$の場合のみを考えることにすると，次の定理が証明できる：

［定理］ もし，$u=-1$，すなわち$u^a{}_b=-\delta^a{}_b$，が成立するならば，カラー対称性は自発的破れを起こしておらず，かつ，カラー閉じ込めが実現している；すなわち，物理的粒子（BRS 1重項）はすべてカラー1重項であり，カラーを持つ粒子はすべてBRS 4重項表現に属する。

（証明） $1+u=0$ならば，(13)より$gv=w$であり，したがって，$gJ^a_\mu-\partial^\nu F^a_{\mu\nu}$の組合せで，ちょうど危険な零質量1粒子$\partial_\mu\beta^a$を含まず，

$$Q^a=\int d^3x\,[J^a_0(x)-g^{-1}\,\partial^k F^a_{0k}(x)] \tag{26}$$

は，well-definedなカラー電荷演算子を与える。すなわちカラー対称性はすべて自発的破れを起こしていない。ところが，この(26)は，“Maxwell”方程式(1)を使うと，

$$Q^a=\int d^3x\,\{Q_{\mathrm{B}},\ g^{-1}D_0\,\bar{c}^{\,a}(x)\} \tag{27}$$

と書ける。この形は，明らかに，任意の物理的状態$|f\rangle,|g\rangle\in\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$に対し，$Q_{\mathrm{B}}|f\rangle=Q_{\mathrm{B}}|g\rangle=0$より，

$$\langle f|Q^a|g\rangle=0 \tag{28}$$

を意味する。特に，BRS 1重項の任意の物理的1粒子状態$a_i^\dagger|0\rangle$をとって，それが，カラー対称性Q^aの表現行列T^a_{ij}の表現，

$$[Q^a,a_i^\dagger]=a_j^\dagger\,T^a_{ji} \tag{29}$$

に属するとしよう。そうすれば，$[a_i,a_j^\dagger]=\delta_{ij}$を用いて，(28)より

$$\begin{aligned}0&=\langle 0|a_i\,Q^a\,a_j^\dagger|0\rangle=\langle 0|a_i[Q^a,a_j^\dagger]|0\rangle\\&=\langle 0|a_i\,a_k^\dagger\,T^a_{kj}|0\rangle=T^a_{ij}\end{aligned} \tag{30}$$

が従う。$T^a_{ij}=0$，すなわち，BRS 1重項粒子はすべてカラー1重項であることが結論された。（証明終）

ここでも，いくつかコメントをしておこう。

i）　$u=-1$ の条件は，上でもいったように，カラー閉じ込めのための一つの十分条件である。しかし，この条件が必要条件でもあるという議論もいくつかある。筆者は，「カラー対称性が自発的破れを起こしていなければ，$u=-1$ である」という命題が証明できるのではないかと期待しているが，残念ながら，成功していない。

ii）　この機構による閉じ込めは，QED などの可換群ゲージ理論では $u\equiv0$ だからあり得ないし，また非可換ゲージ理論でも摂動論では $u=O(\hbar)$ であり，起こっていない。

iii）　$u=-1$ のとき，もし，クォーク場 $\psi_i(x)$ やゲージ場 $A_\mu^a(x)$ に漸近場が存在したとすると，それらはカラーを持つから BRS 4 重項でなければならない。例えば，クォーク場 $\psi_i(x)$ の BRS 変換は

$$[i\lambda Q_B, \psi_i(x)]=i\lambda g T_{ij}^a c^a(x)\psi_j(x) \tag{31}$$

であるが，左辺のクォーク場 $\psi_i(x)$ が漸近場 $\psi_i^{\mathrm{as}}(x)$ を持てば，それは必ず，右辺のクォークと FP ゴーストの複合 Heisenberg 場 $T_{ij}^a c^a(x)\psi_j(x)$ に結合状態 $\mathcal{C}_{\psi_i}^{\mathrm{as}}(x)$ が形成され

$$[i\lambda Q_B, \psi_i^{\mathrm{as}}(x)]=i\lambda \mathcal{C}_{\psi_i}^{\mathrm{as}}(x) \tag{32}$$

を満たす BRS 2 重項 $(\psi_i^{\mathrm{as}}, \mathcal{C}_{\psi_i}^{\mathrm{as}})$ にならねばならぬ，ということを意味する。ゲージ場の場合も，A_μ^a にベクトル漸近場が存在すれば，$D_\mu c^a=\partial_\mu c^a+g(A_\mu\times c)^a$ にゲージ場と FP ゴーストの結合状態が現れることになる。すなわち，$u=-1$ で実現されているカラー閉じ込めは，クォークやグルーオンの漸近場が現れないことを主張するのではなく，むしろ，それらの漸近場が，QED や摂動ゲージ理論での縦波・スカラー・モードや素 FP ゴーストと全く同様に，4 重項機構により閉じ込められていることを意味しているのである。

iv）　$u=-1$ の条件は，実は，非物理的セクターですでに多くの結合状態が存在することを意味している。まず，常に存在する素 4 重項 (4) を

$$\begin{aligned} &A_\mu^a \longrightarrow \partial_\mu \chi^a, \qquad B^a \longrightarrow \beta^a, \\ &D_\mu c^a \longrightarrow \partial_\mu \gamma^a, \qquad \bar{c}^a \longrightarrow \bar{\gamma}^a \end{aligned} \tag{33}$$

と簡明に記そう。ところが，**5-5** で注意したように Landau ゲージでは FP 共役変換 $\mathcal{C}_{\mathrm{FP}}$ 不変性があるから，(33) の後 3 項の $\mathcal{C}_{\mathrm{FP}}$ 変換より

$$\begin{aligned} &\bar{B}^a=-B^a+ig(c\times\bar{c})^a \longrightarrow \bar{\beta}^a, \\ &D_\mu \bar{c}^a \longrightarrow \partial_\mu \Gamma^a, \qquad c^a \longrightarrow \Gamma^a \end{aligned} \tag{34}$$

なる漸近場 $(\bar{\beta}^a, \bar{\Gamma}^a, \Gamma^a) \equiv \mathcal{C}_{\mathrm{FP}}(-\beta^a, \gamma^a, -\bar{\gamma}^a)\mathcal{C}_{\mathrm{FP}}^{-1}$ が存在することがいえる。もちろん，摂動論においては（数係数を除いて）$-\bar{\beta}^a=\beta^a$，$\Gamma^a=\gamma^a$，$\bar{\Gamma}^a=\bar{\gamma}^a$ であり，新たな漸近場ではない。しかし，$u=-1$ の場合は，(6) より $D_\mu\bar{c}^a$ の中の $\partial_\mu\bar{\gamma}^a$ は $(1+u)$ の係数で入っているからなくなっており，それゆえ，(34) の主張する漸近場 $\bar{\Gamma}^a$ は $\bar{\gamma}^a$ とは別物である。したがって，その $\mathcal{C}_{\mathrm{FP}}$ 変換の γ^a と Γ^a も別物である。また，$\bar{\gamma}^a$ は BRS 2 重項の親粒子であるが，$\bar{\Gamma}^a$ は子供粒子でなければならない；すなわち $\{Q_{\mathrm{B}}, \bar{\Gamma}^a\}=0$. なぜなら，WT 恒等式†

$$0=\langle 0|\mathrm{T}\{Q_{\mathrm{B}}, D_\mu\bar{c}^a(x)A_\nu^b(y)\}|0\rangle$$
$$=\langle 0|\mathrm{T}\{Q_{\mathrm{B}}, D_\mu\bar{c}^a(x)\}A_\nu^b(y)|0\rangle-\langle 0|\mathrm{T}\,D_\mu\bar{c}^a(x)D_\nu c^b(y)|0\rangle \qquad (35)$$

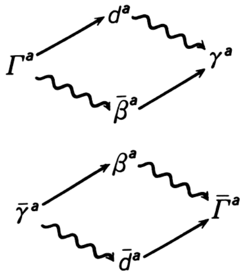
および，(8),(9) より

$$\mathrm{F.T.}\,\langle 0|\mathrm{T}\{Q_{\mathrm{B}}, D_\mu\bar{c}^a(x)\}A_\nu^b(y)|0\rangle$$
$$=-g_{\mu\nu}u^b{}_a(p^2)+\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}(\delta_a^b+u^b{}_a(p^2)) \qquad (36)$$

が従うから，$u^a{}_b\equiv u^a{}_b(p^2=0)=-\delta_b^a$ が成立する今の場合，この Green 関数 (36) に $p^2=0$ の pole は存在しない。A_ν^b は BRS 子供演算子ではない一般のベクトル演算子であるから，これは $\{Q_{\mathrm{B}}, D_\mu\bar{c}^a\}$ が零質量 1 粒子状態をスカラーもベクトルも含んでいないことを意味する††。したがって $D_\mu\bar{c}^a$ の零質量漸近場 $\bar{\Gamma}^a$ は BRS 子供状態，$\{Q_{\mathrm{B}}, \bar{\Gamma}^a\}=0$，でなければならない。このことは，カラー電荷 $Q^a=\int d^3x\{Q_{\mathrm{B}}, D_0\bar{c}^a\}$ の存在にとってももちろん必要なことであった。

ここでは，これ以上の深入りをする余裕はないが，このような性質を持った (33),(34) の漸近場は，BRS, 反 BRS 変換を含む拡張された BRS 代数を考察することにより，（最小個数の場合）さらに $(c\times c)^a$ および $(\bar{c}\times\bar{c})^a$ のチャネルに形成される FP ゴースト数 +2, −2 の結合状態

$$(c\times c)^a \longrightarrow d^a, \quad (\bar{c}\times\bar{c})^a \longrightarrow \bar{d}^a$$



6・11 図

---

† 再び T は，Lorentz 共変な T* 積の意味である。

†† もちろん，全く形式的な可能性としては，ゲージ場 A_ν^b を相手としたときのみたまたま pole の留数が 0 になる，ということを完全に除外することはできないが。

と共に，6·11 図に描いたような全部で 8 個の粒子から成る (反) BRS 多重項となることが示される。図中の → は BRS 変換，⇝ は反 BRS 変換である。すなわち，(反) BRS 2 重項が 4 組現れるのである。χ^a は $\bar{\beta}^a-\beta^a$ と同定される。

6-7 Weinberg-Salam 模型

対称性の自発的に破れたゲージ理論は，弱・電磁相互作用 (weak-electromagnetic interaction) を記述するのに適用され，非常な成功をおさめた。ここでは，今日 Weinberg-Salam 模型，あるいは標準模型 (standard model) と呼ばれるこの模型の基本的な部分を紹介しておこう。

ゲージ群 $SU(2)_W\times U(1)_Y$　多くの実験的・理論的研究を経て，1960 年代半ばには，弱い相互作用に関して次のことが明らかにされていた：弱い相互作用 (の電荷の変化する過程に関する部分) は

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Fermi}}=-\frac{G}{\sqrt{2}}J_\mu^\dagger J^\mu \tag{1}$$

の 4 Fermi 型相互作用で記述できて，この荷電 (charged) カレント J_μ は，レプトン部分とハドロン部分とから成り

$$J_\mu=J_\mu^{(\mathrm{lepton})}+J_\mu^{(\mathrm{hadron})}, \tag{2}$$

両者とも「(ベクトル・カレント V_μ)−(軸性カレント A_μ)」のいわゆる“$V-A$”型カレントである。例えば，レプトン部分 $J_\mu^{(\mathrm{lepton})}$ は，電子 (e) と電子ニュートリノ (ν_e)，μ 粒子 (μ) と μ ニュートリノ (ν_μ)，とを使って

$$J_\mu^{(\mathrm{lepton})}=\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e+\bar{\mu}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_\mu \tag{3}$$

で与えられる。ここで e, ν_e などは対応する粒子の Dirac 場を表す。このカレント (3) は，左手型 (left-handed) レプトンの $SU(2)$ 2 重項

$$L_e\equiv\frac{1-\gamma_5}{2}\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L,\qquad L_\mu\equiv\begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}_L \tag{4}$$

および，それから作った $SU(2)$ カレント $j_\mu^{(a)}\,(a=1,2,3)$

$$j_\nu^{(a)}=\bar{L}_e\gamma_\nu(\tau^a/2)L_e+\bar{L}_\mu\gamma_\nu(\tau^a/2)L_\mu \qquad (\tau^a：\text{Pauli 行列}) \tag{5}$$

を導入すれば，

$$J_\mu^{(\mathrm{lepton})}=2(j_\mu^{(1)}-ij_\mu^{(2)})\equiv 2j_\mu^{(1-i2)},\qquad J_\mu^{(\mathrm{lepton})\dagger}=2j_\mu^{(1+i2)} \tag{6}$$

と書ける。すなわち，(5) のカレントは，明らかに

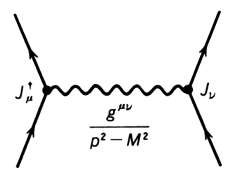
$$\int d^3y\,[j_0^{(a)}(\boldsymbol{y},x_0),j^{(b)}(x)]=i\epsilon_{abc}j_\mu^{(c)}(x) \tag{7}$$

の $SU(2)$ 代数を満たしており，弱い相互作用に現れる荷電カレント $J_\mu^{(\text{lepton})}, J_\mu^{(\text{lepton})\dagger}$ は，その $SU(2)$ カレントの $1 \mp i2$ 成分であるということである。ハドロン部分 $J_\mu^{(\text{hadron})}$ も，したがって全体 $J_\mu = J_\mu^{(\text{lepton})} + J_\mu^{(\text{hadron})}$ も，同じ $SU(2)$ 代数構造を持つことが知られており，この $SU(2)$ を弱アイソスピン (weak isospin) と呼び $SU(2)_\text{W}$ と記す。(1) の Fermi 結合定数 G の大きさは，μ 粒子の崩壊 ($\mu \to e + \bar{\nu}_\text{e} + \nu_\mu$) の確率などから ($m_\text{p}$ を陽子質量として)

$$G = 1.01 \times 10^{-5} m_\text{p}^{-2} = 1.166 \times 10^{-5} (\text{GeV})^{-2} \qquad (8)$$

で与えられることが知られている。

以上の現象論的事実から，弱い相互作用を (対称性の自発的に破れた) ゲージ理論で記述するには，ゲージ群として少なくとも上の弱アイソスピン $SU(2)_\text{W}$ を含まねばならぬことがわかる。すなわち，$SU(2)_\text{W}$ のカレント J_μ に結合する質量 M の Yang-Mills 場が存在すれば，6・12 図に示す Feynman グラフにより，低エネルギー領域 $p^2 \ll M^2$ では (1) で与えたカレント-カレント型の 4 Fermi 相互作用が誘起されるからである。



6・12 図

この $SU(2)_\text{W}$ の生成子を $T^a (a=1,2,3)$，大きさを T と呼ぶ。ところが，(4) で与えたレプトンの $SU(2)_\text{W}$ 2 重項 ($T=1/2$) は，$T^3 = +1/2$ の上成分 (ν_e や ν_μ) は電荷 Q が 0，$T^3 = -1/2$ の下成分 (e や μ) は電荷 Q が -1，であって，$SU(2)_\text{W}$ 群が電磁相互作用の群 $U(1)_\text{EM}$ と直交していないことを示す。すなわち，$U(1)_\text{EM}$ が $SU(2)_\text{W}$ に直交した群であったら，(4) の $SU(2)_\text{W}$ 2 重項は上成分も下成分も共通の電荷を持っていて，弱い相互作用と電磁相互作用が互いに独立にゲージ化できたのであるが，実はそうではない。ここに，**弱・電磁相互作用を同時に**からめて考えざるを得ない必然性がある，すなわち**統一せざるを得ない**のである。そこで，$SU(2)_\text{W}$ に直交した $U(1)$ 群を導入し，$U(1)_Y$ と記し，その電荷 (生成子) を弱超電荷 (weak hypercharge) Y と呼ぶ。(4) のレプトン $SU(2)_\text{W}$ 2 重項 L_e や L_μ に，弱超電荷 $Y = -1/2$ を付与することにすれば，電磁相互作用の電荷 Q は，

$$Q = T^3 + Y \qquad (9)$$

で与えられることになる。この関係式 (9) は，電磁相互作用 $U(1)_\text{EM}$ の生成子 Q を，$U(1)_Y$ の生成子 Y と $SU(2)_\text{W}$ の第 3 成分の生成子 T^3 とで与え

る代数の間の関係式で，単に(4)のレプトン2重項のみならず，任意の多重項の上で成立すべきものである。したがって，我々が出発点で採用すべきゲージ群 G は

$$G=SU(2)_{\mathrm{W}}\times U(1)_Y \tag{10}$$

であり，電荷 Q に結合する電磁場は，(9)の関係式により，$SU(2)_{\mathrm{W}}$ のゲージ場の第3成分と $U(1)_Y$ のゲージ場の線形結合で与えられるべきことがわかる。このとき，零質量ゲージ粒子は光子のみでなければならないから，(9)の組合せ $Q=T^3+Y$ のみを残し，他の対称性はすべて自発的に破れなければならない。すなわち $G=SU(2)_{\mathrm{W}}\times U(1)_Y$ から $H=U(1)_{\mathrm{EM}}$ へ破れる。

ゲージ場と Higgs 場の部分　ゲージ群(10)に対応して，$SU(2)_{\mathrm{W}}$ のゲージ場 $\vec{A}_\mu=(A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3)$ と，$U(1)_Y$ のゲージ場 B_μ を導入し，その Lagrangian は

$$\mathcal{L}_{\text{ゲージ場}}=-\frac{1}{4}(\partial_\mu\vec{A}_\nu-\partial_\nu\vec{A}_\mu+g\vec{A}_\mu\times\vec{A}_\nu)^2-\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu)^2 \tag{11}$$

で与えられる。g は $SU(2)_{\mathrm{W}}$ の結合定数で，以下で現れる $U(1)_Y$ の結合定数は g' とする。$SU(2)_{\mathrm{W}}\times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{\mathrm{EM}}$ の自発的破れを起こすべく，**6-5** の $SU(2)$ Higgs-Kibble 模型と同じ $SU(2)_{\mathrm{W}}$ 2重項複素スカラー場 $\boldsymbol{\Phi}$ (Higgs 2重項場) を導入し，前と同じ真空期待値

$$\langle 0|\boldsymbol{\Phi}(x)|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix} \tag{12}$$

を持つようにする。このとき，$U(1)_{\mathrm{EM}}$ の対称性 Q を壊さないためには，真空期待値を持つ2重項場 $\boldsymbol{\Phi}$ の下成分 ($T^3=-1/2$) は $Q=0$ の場でなければならない。それゆえ，Higgs 2重項場 $\boldsymbol{\Phi}$ には，(9)を考慮して，弱超電荷 $Y=+1/2$ を付与する。それに対応した共変微分を用いて，Higgs 2重項場 $\boldsymbol{\Phi}$ のセクターの Lagrangian は

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Higgs}}=\left|\left(\partial_\mu-\frac{i}{2}g'B_\mu-\frac{i}{2}g\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu\right)\boldsymbol{\Phi}\right|^2+\mu^2\boldsymbol{\Phi}^\dagger\boldsymbol{\Phi}-\frac{\lambda}{2}(\boldsymbol{\Phi}^\dagger\boldsymbol{\Phi})^2 \tag{13}$$

で与えられる。これは $g'=0$ 極限で，$SU(2)$ Higgs-Kibble 模型と同じものに帰着する。

(12)の真空期待値を実現する破れた真空の上で，ゲージ場 $\vec{A}_\mu, B_\mu$ の質量項は (tree レベルで) (13)の運動項 $|D_\mu\boldsymbol{\Phi}|^2$ で $\boldsymbol{\Phi}$ を(12)の値においた項から生ずる：

$$(\text{ゲージ場質量項})=\left|\frac{-i}{2}\begin{pmatrix} g'B_\mu+gA^3_\mu & gA^1_\mu-igA^2_\mu \\ gA^1_\mu+igA^2_\mu & g'B_\mu-gA^3_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right|^2$$

$$=(g^2v^2/8)[(A^1_\mu)^2+(A^2_\mu)^2]+(v^2/8)(g'B_\mu-gA^3_\mu)^2. \quad (14)$$

したがって，ゲージ場を組み換えて，

$$W_\mu\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}(A^1_\mu-iA^2_\mu), \qquad W^\dagger_\mu\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}(A^1_\mu+iA^2_\mu), \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}\begin{pmatrix} gA^3_\mu-g'B_\mu \\ g'A^3_\mu+gB_\mu \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^3_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (16)$$

を定義すれば，(14) の質量項は対角化されて

$$(\text{ゲージ場質量項})=M^2_W W^\dagger_\mu W^\mu+\frac{1}{2}M^2_Z Z_\mu Z^\mu, \quad (17)$$

$$M^2_W=\frac{1}{4}g^2v^2, \qquad M^2_Z=\frac{1}{4}(g^2+g'^2)v^2=\frac{M^2_W}{\cos^2\theta_W} \quad (18)$$

となる。(15) の $W_\mu(W^\dagger_\mu)$ は $Q=+1\,(-1)$ を持つ質量 M_W の荷電ベクトル場，(16) の Z_μ は質量 M_Z の中性ベクトル場で，それぞれ，W ボソン，Z ボソンと呼ばれる。(16) で Z_μ と直交するよう定義した中性ゲージ場 A_μ は，(17) の質量項に現れず，期待通り，質量 0 の光子に対応する電磁場である。(16) で定義した角 θ_W ($\tan\theta_W=g'/g$) は Weinberg 角と呼ばれる。

(16) の逆変換を利用して，$\mathcal{L}_{\text{ゲージ場}}$ (11) を W_μ, Z_μ, A_μ で書き換えると，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{ゲージ場}}=&-\frac{1}{4}F^A_{\mu\nu}F^{A\mu\nu}-\frac{1}{4}F^Z_{\mu\nu}F^{Z\mu\nu}\\ &-\frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu W_\nu-\mathcal{D}_\nu W_\mu)^\dagger(\mathcal{D}^\mu W^\nu-\mathcal{D}^\nu W^\mu)\\ &-i(eF^A_{\mu\nu}+g\cos\theta_W F^Z_{\mu\nu})W^{\mu\dagger}W^\nu\\ &+\frac{g^2}{2}[|W_\mu W^\mu|^2-(W_\mu W^{\mu\dagger})^2]. \end{aligned} \quad (19)$$

ただし，ここで $F^A_{\mu\nu}$ と $F^Z_{\mu\nu}$ は $F^X_{\mu\nu}=\partial_\mu X_\nu-\partial_\nu X_\mu$ の意味で，W_ν の“共変微分” $\mathcal{D}_\mu W_\nu$ は，

$$gA^3_\mu=(gg'A_\mu+g^2Z_\mu)/\sqrt{g^2+g'^2}=eA_\mu+g\cos\theta_W Z_\mu \quad (20)$$

$$e\equiv gg'/\sqrt{g^2+g'^2}\ (=g\sin\theta_W=g'\cos\theta_W) \quad (21)$$

を用いて共変化された微分

$$\mathcal{D}_\mu W_\nu\equiv(\partial_\mu-igA^3_\mu)W_\nu=(\partial_\mu-ieA_\mu-ig\cos\theta_W Z_\mu)W_\nu \quad (22)$$

である。(22) は確かに，電磁相互作用 $U(1)_{EM}$ に関しては荷電ベクトル場 W_ν に対する共変微分 $(\partial_\mu-ieA_\mu)$ になっており，(21) で定義される e は電

磁相互作用の結合定数を与えることがわかる。(19) の $\mathcal{L}_{ゲージ場}$ には，電磁場 A_μ の W ボソンへの結合項として，(22) の形の共変微分を通じたいわゆる極小相互作用 (minimal interaction) 項以外に，場の強さ $F^A_{\mu\nu}$ を通じたいわゆる Pauli 項 $-ieF^A_{\mu\nu}W^{\mu\dagger}W^\nu$ が特定の割合で現れている点が興味深い。後者は W ボソンの異常磁気能率に寄与する。

レプトンとの結合 弱い相互作用の電荷の変化する部分に関しては $V-A$ 型の相互作用であることから，レプトン場は左手型成分 $\psi_L\equiv(1-\gamma_5)\psi/2$ のみが $SU(2)_W$ 2 重項で，右手型成分 $\psi_R\equiv(1+\gamma_5)\psi/2$ は $SU(2)_W$ 1 重項ととらねばならない。現在では，電子や μ 粒子以外により重いレプトン τ 粒子が知られているので，(4) を拡張して，

$$L_e=\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L,\quad L_\mu=\begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}_L,\quad L_\tau=\begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix}_L \quad : \quad Y=-\frac{1}{2} \tag{23}$$

$$R_e=e_R,\quad R_\mu=\mu_R,\quad R_\tau=\tau_R \quad : \quad Y=-1 \tag{24}$$

とする。弱超電荷 Y の値は，関係式 (9) より決まる。ここに，e, μ, τ に対応するニュートリノ ν_e, ν_μ, ν_τ の右手型成分が現れていないことに注意しよう。零質量ニュートリノは，そもそも Weyl 場で，右手型成分はもとよりないのである。昔から，電子と μ 粒子が質量の違いを除けば，互いに全く同じ性質を持つことが謎で "e-μ パズル" と呼ばれてきた。そのことは，(23), (24) に示すように，e, μ が弱・電磁相互作用において全く同じ構造の多重項のくり返しとして現れることに反映している。今や τ 粒子まで加わっているので，"e-μ パズル" は，"自然はなぜ 3 度も同じことを繰り返すのか" という問に言い直される。(23), (24) に現れる e, μ, τ 多重項の繰り返しを 3 世代 (three generation) 構造と呼ぶ。

(23), (24) の場を用いて，レプトン部分の Lagrangian は

$$\mathcal{L}^{\text{kin.}}_{\text{lepton}}=\sum_{j=e,\mu,\tau}\left[\bar{L}_j i\gamma^\mu\left(\partial_\mu+\frac{i}{2}g'B_\mu-\frac{i}{2}g\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu\right)L_j\right.$$
$$\left.+\bar{R}_j i\gamma^\mu(\partial_\mu+ig'B_\mu)R_j\right] \tag{25}$$

$$\mathcal{L}^{\text{mass}}_{\text{lepton}}=\sum_{j=e,\mu,\tau}(-f_j)[(\bar{L}_j\Phi)R_j+\bar{R}_j(\Phi^\dagger L_j)] \tag{26}$$

で与えられる。レプトンの Dirac 質量項は，Higgs 2 重項 Φ との湯川相互作用項 (26) から，Φ が (12) の真空期待値を得た後に初めて現れる：例えば，(26) の電子の項 $j=e$ を見れば

$$-f_e\left[(\bar{\nu}_e,\ \bar{e})_L\begin{pmatrix}0\\ v/\sqrt{2}\end{pmatrix}e_R+\text{h. c.}\right]=-(f_e v/\sqrt{2})\bar{e}e=-m_e\bar{e}e. \quad (27)$$

したがって，レプトンの Higgs 2 重項との湯川結合定数 f_j は，(tree レベルで) それぞれのレプトンの質量 m_j に比例し，(18) を用いれば

$$f_j=\sqrt{2}\frac{m_j}{v}=g\frac{m_j}{\sqrt{2}M_W} \quad (28)$$

となる。この湯川結合定数 f_j は，普通 $m_j/M_W\ll 1$ なので $SU(2)_W$ ゲージ結合定数 g に比してもかなり小さいことがわかる。

(25) 中のレプトン・カレントとゲージ場との相互作用項 $\mathcal{L}_{\text{int}}$ は，ゲージ場を (15), (16) の W_μ, Z_μ, A_μ で書き換えて，

$$\mathcal{L}_{\text{int}}=\frac{g}{2\sqrt{2}}(W_\mu^\dagger J^\mu+W_\mu J^{\mu\dagger})+eA_\mu J^\mu_{\text{em}}+\frac{g}{\cos\theta_W}Z_\mu J^\mu_Z \quad (29)$$

となる。ただし，J_μ は (1) の 4 Fermi 相互作用に現れた荷電カレントのレプトン部分 $J_\mu^{(\text{lepton})}=2j_{\mu\,(\text{lepton})}^{(1-i2)}$ で，今の場合 τ 世代まで入った

$$J_\mu^{(\text{lepton})}=\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e+\bar{\mu}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_\mu+\bar{\tau}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_\tau \quad (30)$$

で与えられる。J^μ_{em} は電磁相互作用カレント

$$J_{\text{em}}^{\mu(\text{lepton})}=-\bar{e}\gamma^\mu e-\bar{\mu}\gamma^\mu\mu-\bar{\tau}\gamma^\mu\tau, \quad (31)$$

J^μ_Z は Z ボソンの結合する中性カレント (neutral current)

$$J^\mu_Z=j^{(3)\mu}-\sin^2\theta_W J^\mu_{\text{em}}, \quad (32)$$

$$j^{(3)}_{\mu(\text{lepton})}=\sum_{j=e,\mu,\tau}\bar{L}_j\gamma_\mu(\tau^3/2)L_j \quad (33)$$

である。(29) の電磁相互作用項 $eA_\mu J^\mu_{\text{em}}$ は，ちょうど，荷電レプトンの運動項を $U(1)_{\text{EM}}$ 共変微分にした形の極小相互作用になっていることに注意しておこう。

(29) の W ボソンと荷電カレント J_μ の相互作用を用いて前に掲げた 6・12 図のタイプの Feynman グラフを計算すれば，W ボソン質量 M_W に比べて低エネルギーの領域 ($p^2\ll M_W^2$) では実質上 (1) の形の 4 Fermi 相互作用が再現する：

$$\left(\frac{g}{2\sqrt{2}}\right)^2 J_\mu^\dagger\frac{g^{\mu\nu}}{p^2-M_W^2}J_\nu \underset{p^2\ll M_W^2}{\simeq} -\frac{G}{\sqrt{2}}J_\mu^\dagger J^\mu. \quad (34)$$

これより，$g^2/8M_W^2=G/\sqrt{2}$，よって W ボソンの質量は

$$M_W=\left(\frac{g^2}{8}\frac{\sqrt{2}}{G}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8G}\frac{e^2}{\sin^2\theta_W}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{37.3}{|\sin\theta_W|}\text{GeV}. \quad (35)$$

これは，また，(18) を用いれば，Z ボソンの質量 M_Z と Higgs 2 重項場の真

空期待値 (12) の大きさ $v/\sqrt{2}$ に対して次式を意味する：

$$M_Z=\frac{M_W}{|\cos\theta_W|}=\frac{74.6}{|\sin 2\theta_W|}\,\text{GeV}, \tag{36}$$

$$\frac{v}{\sqrt{2}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4G}\right)^{\frac{1}{2}}=174\ \text{GeV}. \tag{37}$$

$v/\sqrt{2}$ がパラメータなしに決まったことに注意したい。これは $SU(2)_W\times U(1)_Y$ の $U(1)_{EM}$ への自発的破れの特徴的スケールが ～100 GeV であることを示している。

さらに，(29) には電荷を持たない Z ボソンと中性カレント J_Z^μ の相互作用項があり，Z ボソンを媒介とするグラフ 6･12 図は，旧来の 4 Fermi 型理論では知られていなかった中性カレント相互作用

$$\frac{1}{2}\left(\frac{g}{\cos\theta_W}\right)^2 J_Z^\mu \frac{g_{\mu\nu}}{p^2-M_Z^2} J_Z^\nu \simeq -4\frac{G}{\sqrt{2}} J_{Z\mu} J_Z^\mu \tag{38}$$

が存在することを予言する。この存在は実際に，(反) ニュートリノと電子 (または陽子 p) の弾性散乱 $\bar{\nu}_e e\rightarrow\bar{\nu}_e e$, $\overset{(-)}{\nu}_\mu e\rightarrow\overset{(-)}{\nu}_\mu e$, $\overset{(-)}{\nu}p\rightarrow\overset{(-)}{\nu}p$ などで観測され，それらのデータから，(32) の J_Z^μ 中の Weinberg 角因子 $\sin^2\theta_W$ が決定された。その最近の値は，

$$\sin^2\theta_W=0.222\pm0.004 \qquad \text{(中性カレントからの実験値)} \tag{39}$$

である。これを用いれば，(35), (36) の W, Z ボソンの質量は

$$M_W\simeq 79.2\ \text{GeV}, \qquad M_Z\simeq 89.8\ \text{GeV} \tag{40}$$

と予言される。果たして 1983 年 Rubbia (ルビア) らによって CERN でついに発見された W, Z ボソンは，その質量が

$$M_W=81.8\pm1.5\ \text{GeV}, \qquad M_Z=92.6\pm1.7\ \text{GeV} \qquad \text{(実験値)} \tag{41}$$

であった。上の予言値 (40) とよく一致している。しかも，1-loop グラフの補正を計算すれば，tree レベルでの予言値 (40) は 2 ～ 3%大きい方に修正されて $M_W\simeq 81$ GeV，$M_Z\simeq 92$ GeV となることが知られており，理論と実験の一致は驚くほどよい。

クォークとの結合　一方，何百と存在するハドロン (バリオンとメソン) に関しては，それらを qqq や $q\bar{q}$ 結合状態として実現している基本構成子——クォーク場 $q(x)$ を用いて Lagrangian を書く。前にも少し触れたが，クォーク場 $q_{if}(x)$ は，強い相互作用 (すなわち QCD) のカラー $SU(3)_c$ の添字 $i(=1,2,3)$ 以外に，それと直交する自由度としてフレーバーの添字 f を持っている。以下，カラー添字 i は省略する。クォークのフレーバーの種

類として，質量の順に u (up), d (down), s (strange), c (charm), b (bottom) の 5 種が既に観測されており，後にわかる理由によって，もう一つ，t (top) があると考えられている。これら 6 種のクォークの電荷は

$$
\begin{aligned}
Q&=\frac{2}{3} &:&\quad u, c, t, \cdots \equiv q_F \qquad (F=1,2,3,\cdots)\\
Q&=-\frac{1}{3} &:&\quad d, s, b, \cdots \equiv q_f \qquad (f=1,2,3,\cdots)
\end{aligned}
\tag{42}
$$

で与えられ，$Q=2/3$ と $Q=-1/3$ の 2 系列に分かれる。$Q=2/3$ のクォークを上系列 (upper quarks) と呼び q_F で，$Q=-1/3$ の方を下系列 (lower quarks) と呼び q_f で表すことにする。点々 $(\cdots)$ は 6 種以上あった場合の話である。これらのクォークの左手型成分は $SU(2)_W$ 2 重項，右手型成分は $SU(2)_W$ 1 重項とし，弱超電荷 Y は公式 (9) で決め，次の $SU(2)_W\times U(1)_Y$ 多重項を得る：

$$L_u=\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L, \quad L_c=\begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L, \quad L_t=\begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L \quad : \quad Y=+\frac{1}{6} \tag{43}$$

$$R_u=u_R, \quad R_c=c_R, \quad R_t=t_R \quad : \quad Y=+\frac{2}{3} \tag{44}$$

$$R_d=d_R, \quad R_s=s_R, \quad R_b=b_R \quad : \quad Y=-\frac{1}{3} \tag{45}$$

すなわち，クォークもレプトンと同じく 3 世代構造となる。レプトンと異なるのは，(43) の $SU(2)_W$ 2 重項の下成分 $(d', s', b')\equiv q'_F$ が質量固有状態の $(d, s, b)\equiv q_f$ と必ずしも一致せず，一般にユニタリー回転を受けた

$$q'_F=\sum_{f=1}^{3} U_{Ff}\, q_f \tag{46}$$

となる点である。このユニタリー回転 U の存在は，まだ，3 種のクォーク u, d, s しか知られていなかった 1960 年代にまず Cabibbo (キャビボ) が導入したもので，続いて 1970 年に Glashow (グラショウ)-Iliopoulos (イリオプーロス)-Maiani (マイアニ) (GIM) が，第 4 番目のクォーク c を導入しクォーク 2 世代を完結させて

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta_C & \sin\theta_C \\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \tag{47}$$

と書いた。角 θ_C は Cobibbo 角と呼ばれ $\sin\theta_C\simeq 0.22$ (実験値) である。さらに 1973 年，小林-益川は CP 不変性の破れを説明するために第 3 世代クォーク t, b の存在を予言し，(47) を (46) の 3×3 ユニタリー回転に拡張した。この 3×3 ユニタリー行列は**小林-益川混合行列** (mixing matrix) と呼

ばれ，その一つのパラメトリゼーションのとり方は

$$U=\begin{pmatrix} U_{\rm ud} & U_{\rm us} & U_{\rm ub} \\ U_{\rm cd} & U_{\rm cs} & U_{\rm cb} \\ U_{\rm td} & U_{\rm ts} & U_{\rm tb} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} {\rm c}_1 & {\rm s}_1{\rm c}_3 & {\rm s}_1{\rm s}_3 \\ -{\rm s}_1{\rm c}_2 & {\rm c}_1{\rm c}_2{\rm c}_3-{\rm s}_2{\rm s}_3e^{i\delta} & {\rm c}_1{\rm c}_2{\rm s}_3+{\rm s}_2{\rm c}_3e^{i\delta} \\ -{\rm s}_1{\rm s}_2 & {\rm c}_1{\rm s}_2{\rm c}_3+{\rm c}_2{\rm s}_3e^{i\delta} & {\rm c}_1{\rm s}_2{\rm s}_3-{\rm c}_2{\rm c}_3e^{i\delta} \end{pmatrix} \tag{48}$$

で与えられる。ただし ${\rm c}_i\equiv\cos\theta_i$，${\rm s}_i\equiv\sin\theta_i$ $(i=1,2,3)$．この行列は，実験的には対角成分が支配的である。

(43) においては，$SU(2)_{\rm W}$ 2 重項を，上成分 $(T^3=+1/2)$ がちょうど上系列クォーク (質量固有状態) u，c，t になるようにとったが，その三つの 2 重項の線形結合をとり直せば，下成分 $(T^3=-1/2)$ がちょうど下系列クォーク d,s,b に一致するようにもできる；すなわち，(42) の記号 q_F，q_f を用いて，(43) の 2 重項は

$$L_F=\begin{pmatrix} q_F \\ q'_F=U_{Ff}\,q_f \end{pmatrix}_{\rm L}=U_{Ff}\begin{pmatrix} U^\dagger_{fF'}\,q_{F'} \\ q_f \end{pmatrix}\equiv U_{Ff}\,L_f \tag{49}$$

と書け，L_f は“下系列対角”な $SU(2)_{\rm W}$ 2 重項となる。

(43)～(45) の多重項を用いて，クォーク部分の Lagrangian は

$$\mathcal{L}^{\rm kin.}_{\rm quark}=\sum_F \overline{L}_F\,i\gamma^\mu\Big(\nabla_\mu-\frac{i}{6}g'B_\mu-\frac{i}{2}g\,\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu\Big)L_F$$

$$+\sum_F \overline{R}_F\,i\gamma^\mu\Big(\nabla_\mu-i\frac{2}{3}g'B_\mu\Big)R_F+\sum_f \overline{R}_f\,i\gamma^\mu\Big(\nabla_\mu+\frac{i}{3}g'B_\mu\Big)R_f, \tag{50}$$

$$\mathcal{L}^{\rm mass}_{\rm quark}=-\sum_f f_f\,[(\overline{L}_f\Phi)R_f+\overline{R}_f(\Phi^\dagger L_f)]$$

$$-\sum_F f_F\,[(\overline{L}_F\,\widetilde{\Phi})R_F+\overline{R}_F(\widetilde{\Phi}^\dagger L_F)], \tag{51}$$

で与えられる。ただし，F は上系列クォーク u,c,t を，f は下系列クォーク d,s,b をそれぞれ走る添字であり，∇_μ は QCD のグルーオン場† G^a_μ を用いたカラー $SU(3)_c$ 共変微分 $\nabla_\mu q=(\partial_\mu-ig_c\,G^a_\mu\lambda^a/2)q$ を表す。(51) 第 2 項に現れる $\widetilde{\Phi}$ は，6-5 (42) で定義した $\widetilde{\Phi}\equiv i\tau_2\,\Phi^*$ で，上成分に真空期待値を持ち，上系列クォーク q_F の質量項を与えるのに使われる。ここでもレプトンの場合の (28) と同じ関係式が成立し，Higgs 場との湯川結合定数 f_F, f_f は，クォーク質量 m_F, m_f に比例する。

(50) 中のゲージ場との相互作用項も，レプトンの場合と同じ式 (29) で与えられる。荷電カレント J_μ と電磁カレント $J^\mu_{\rm em}$ への，このクォーク (ハド

---

† QCD の $SU(3)_c$ ゲージ場を 5-1 では A^a_μ と書いたが，ここでは $SU(2)_{\rm W}$ のゲージ場 $\vec{A}_\mu$ とまぎらわしいので G^a_μ と記す。

ロン）部分の寄与は，

$$J_\mu^{(\text{quark})}=\bar{q}_f\,U_{fF}^\dagger\,\gamma_\mu(1-\gamma_5)q_F, \tag{52}$$

$$J_{\text{em}}^{\mu(\text{quark})}=\frac{2}{3}(\bar{u}\gamma^\mu u+\bar{c}\gamma^\mu c+\bar{t}\gamma^\mu t)-\frac{1}{3}(\bar{d}\gamma^\mu d+\bar{s}\gamma^\mu s+\bar{b}\gamma^\mu b), \tag{53}$$

となる。中性カレント J_Z^μ も (32) の形 $j^{(3)\mu}-\sin^2\theta_W J_{\text{em}}^\mu$ のままで，その $j_\mu^{(3)}$ へのクォークの寄与は

$$\begin{aligned} j_{\mu(\text{quark})}^{(3)}&=\bar{L}_F\gamma_\mu(\tau^3/2)L_F=\frac{1}{4}[\,\bar{q}_F\gamma_\mu(1-\gamma_5)q_F-\bar{q}_f\,U_{fF}^\dagger\gamma_\mu(1-\gamma_5)U_{Ff'}\,q_{f'}] \\ &=\frac{1}{4}[\,\bar{q}_F\,\gamma_\mu(1-\gamma_5)q_F-\bar{q}_f\,\gamma_\mu(1-\gamma_5)q_f] \end{aligned} \tag{54}$$

と計算される。

GIM 機構　ここで，(52) の荷電カレント $J_\mu^{(\text{quark})}$ には，$SU(2)_W$ 2 重項に (46) のクォーク場の混合がある反映として，混合行列 $U_{fF}^\dagger$ が現れていることに注意しよう。話を簡単にかつあらわにするため，混合行列が (47) で与えられる，クォークが 2 世代しかない場合

$$L_u=\begin{pmatrix} u \\ d\cos\theta_C+s\sin\theta_C \end{pmatrix}_L,\quad L_c=\begin{pmatrix} c \\ -d\sin\theta_C+s\cos\theta_C \end{pmatrix}_L, \tag{55}$$

を考えることにすれば，(52) は

$$\begin{aligned} J_{\mu\,2\text{世代}}^{(\text{quark})}&=(\bar{d}\cos\theta_C+\bar{s}\sin\theta_C)\gamma_\mu(1-\gamma_5)u \\ &\quad+(\bar{s}\cos\theta_C-\bar{d}\sin\theta_C)\gamma_\mu(1-\gamma_5)c \end{aligned} \tag{56}$$

となる。混合行列は対角成分が支配的 ($\cos\theta_C\gg\sin\theta_C$) であるから，同一世代内の遷移 $u\rightleftarrows d$，$c\rightleftarrows s$ が主で，世代間遷移 $u\rightleftarrows s$，$c\rightleftarrows d$ は相対的に少ない†。しかし，たとえ $\sin\theta_C$ の因子で小さくなっているといえ，後者の世代間遷移が存在することは重要である：例えば，($u\bar{s}$) 結合状態である K^+ 中間子は (56) の $\sin\theta_C\,\bar{s}\gamma_\mu(1-\gamma_5)u$ の項を通じてのみ崩壊できるのである。

これに対し，中性カレント J_Z^μ においては，(54) で見たように，このクォーク混合の効果が消えて，フレーバーについて対角的になっている点が極めて重要である。すなわち (54) で，混合行列要素 $\sum_F U_{fF}^\dagger U_{Ff'}$ は，U のユニタリー性のおかげで $\delta_{ff'}$ となったのである。ところが，もし，クォークが u, d, s の 3 種しかなかったとしたらどうであろうか。この場合，c がないので，$SU(2)_W$ 2 重項は (55) の初めの L_u のみとなり，したがって $U_{fF}^\dagger U_{Ff'}$ の添字 F は u に限られ $\delta_{ff'}$ とはならない；すなわち (54) の $j_\mu^{(3)}$ はこの場合

† 前者を Cabibbo favored process，後者を Cabibbo suppressed process と呼ぶ。

$$\frac{1}{4}\left[\bar{u}\gamma_\mu(1-\gamma_5)u-(\bar{d}\cos\theta_C+\bar{s}\sin\theta_C)\gamma_\mu(1-\gamma_5)(d\cos\theta_C+s\sin\theta_C)\right] \tag{57}$$

となり，特に，$(-1/4)\cos\theta_C\sin\theta_C[\bar{d}\gamma_\mu(1-\gamma_5)s+\text{h.c.}]$ の項はフレーバーについて対角的でなく，フレーバーを変える中性カレント (flavor changing neutral current 略して FCNC) と呼ばれる。このような FCNC があれば，例えば，$(d\bar{s}-s\bar{d})$ 結合状態の K_L^0 中間子の崩壊過程

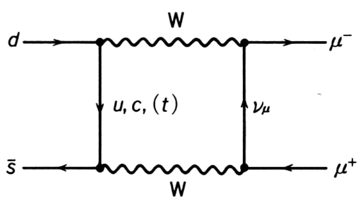
$$K_L^0 \longrightarrow \mu^+ + \mu^- \tag{58}$$

が，主崩壊モード $K_L^0 \to \pi^\pm + e^\mp(\mu^\mp)+\nu$ と同じオーダーで起こるはずであるが，その分岐比 (branching ratio；全崩壊確率中に占める割合) B の実験値は

$$B(K_L^0 \to \mu^+\mu^-)=(9.1\pm1.9)\times10^{-9} \tag{59}$$

と極めて小さい。したがって (57) のような FCNC は (tree レベルでは) 存在してはいけない。このために，GIM は (当時未発見の) c クォークを導入して (55) の 2 世代分の $SU(2)_W$ 2 重項をつくり，それぞれの FCNC への寄与が相殺するようにしたのである；すなわち $f\neq f'$ に対し $\sum_{F=u,c} U_{fF}^\dagger U_{Ff'}=0$. このような FCNC 相殺の機構を **GIM 機構**という。この機構は何世代クォークが存在しても同様で，したがって 3 世代目の下系列の b クォークが発見されている今は，b クォークの関係する FCNC を相殺するためにどうしても上系列の t クォークの存在が必要とされるのである。ついでながら，$K_L^0 \to \mu^+ + \mu^-$ の分岐比が 0 ではなく，(59) の値をとるということも，GIM 機構をもつゲージ理論を支持する証拠となっている。実際，(58) の過程には 6・13 図に示した 1-loop グラフが寄与する。その振幅は，大ざっぱに評価して，

$$\mathfrak{M} \sim \frac{g^4}{M_W^2}\frac{m_c^2-m_u^2}{M_W^2}\sin\theta_C\cos\theta_C \sim \alpha\frac{m_c^2}{M_W^2}\frac{\sin\theta_C}{G} \tag{60}$$



6・13 図

となり†，これは主崩壊モードの通常の振幅 $\sin\theta_C/G$ に比して，因子 $\alpha m_c^2/M_W^2=(1/137)(1.5/80)^2\sim 0.3\times 10^{-4}$ だけ小さく，確率はその 2 乗 $\sim 10^{-9}$ で，(59) の分岐比をよく再現している。

$\mathcal{CP}$ の破れ 弱い相互作用は，例えば荷電カレント J_μ は $V-A$ 型で，パリティ $\mathcal{P}$ を"最大"に破っている。この $\mathcal{P}$ の破れは，Weinberg-Salam 模型では，フェルミオン場のカイラル (左手型・右手型) 成分を基本的な場として扱い，うまくとり入れられている。ところが，弱い相互作用ではさらに $\mathcal{CP}$ 不変性も破れている。例えば，$CP=-1$ であるはずの長寿命 K^0 中間子 K_L^0 が，$CP=+1$ の 2π 状態に崩壊するのである。$\mathcal{CP}$ の破れが Weinberg-Salam 模型で起こり得るためには，その Lagrangian の結合定数のどれかが実数でなく複素数とならねばならない。ゲージ場部分や Higgs 場自己相互作用部分 (もし Higgs 2 重項が 1 種類のみなら) では，これは起こり得ない ($\mathcal{L}$ の hermite 性から)。Higgs 場とクォーク (レプトン) の湯川相互作用部分も，フェルミオン場の定義を取り直す自由度を用いてその結合定数 f_i, f_F, f_f を常に実数 (かつ正) にできるので $\mathcal{CP}$ を破ることができない。(26) や (51) では既にこれを実行して湯川結合定数を (フェルミオンの種類について対角的な) 実数かつ正の量とした形を与えたので，ここで常にそうできることを示しておこう。クォーク・セクターで話をすると，一般に，$SU(2)_W$ 2 重項の左手型クォーク場 L_i と，$SU(2)_W$ 1 重項の右手型"上系列"クォーク場 $R_i^{上}$ および"下系列"クォーク場 $R_i^{下}$ とが，n 世代分 ($i=1,2,\cdots,n$) 存在する場合，その Higgs 2 重項 $\boldsymbol{\Phi}$ との湯川相互作用項の最も一般的な形は

$$\mathcal{L}_Y=-\sum_{i,j=1}^{n}[g_{ij}^{下}(\bar{L}_i\boldsymbol{\Phi})R_j^{下}+g_{ij}^{上}(\bar{L}_i\tilde{\boldsymbol{\Phi}})R_j^{上}+\text{h.c.}] \qquad (61)$$

で与えられる。ここで $g_{ij}^{上}$ および $g_{ij}^{下}$ は一般に複素数の湯川結合定数であり，それぞれ n^2 個ある。この $\mathcal{L}_Y$ が (51) のような"標準形"に書き直せることは，次のように示せる。まず，任意の複素行列 M が，二つのユニタリー行列 U, V を用いて対角化でき，

$$UMV^\dagger=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots\end{pmatrix} \qquad (\lambda_i：実\ かつ\ 正) \qquad (62)$$

の形に表せるということを思い出す。そこで湯川結合定数 $(g_{ij}^{上})$ および

† c クォークの質量 $m_c\simeq 1.5$ GeV が u クォークの質量より十分大きいことを用いた。

$(g_{ij}^{下})$ を二つの $n\times n$ 複素行列とみなせば，それぞれ二つのユニタリー行列を用いて (62) の形にできることがわかる：すなわち，

$$\sum_{i,j} U_{Fi}^{上} g_{ij}^{上} V_{F'j}^{上*} = f_F\,\delta_{FF'}, \qquad \sum_{i,j} U_{fi}^{下} g_{ij}^{下} V_{f'j}^{下*} = f_f\,\delta_{ff'} \tag{63}$$

となるユニタリー行列 $U^{上,下}$, $V^{上,下}$ が存在し，対角成分 f_F, f_f は正の実数である。(63) は，初めのクォーク場 $L_i, R_i^{上}, R_i^{下}$ の代わりに，ユニタリー変換をした次の場

$$L_F \equiv \sum_i U_{Fi}^{上} L_i, \qquad L_f \equiv \sum_i U_{fi}^{下} L_i \tag{64}$$

$$R_F \equiv \sum_i V_{Fi}^{上} R_i^{上}, \qquad R_f \equiv \sum_i V_{fi}^{下} R_i^{下} \tag{65}$$

を用いれば，(61) の $\mathcal{L}_Y$ が実際 (51) の“標準形” $\mathcal{L}_{\text{quark}}^{\text{mass}}$ に帰着することを示している。また，(64) の関係式は，(49) と比較すれば，

$$U_{Ff} = (U^{上}\,U^{下\dagger})_{Ff} \tag{66}$$

を導き，小林-益川混合行列 U_{Ff} が，湯川結合定数行列 $g_{ij}^{上}, g_{ij}^{下}$ を対角化する上系列のユニタリー行列 $U^{上}$ と下系列のそれ $U^{下}$ とのずれから生ずることも明らかにしている。

いったん (51) のような“標準形”にすれば，湯川相互作用項が $\mathcal{CP}$ を破らないことはすぐわかる。実際，Higgs 場 $\boldsymbol{\Phi}$ の 't Hooft パラメトリゼーション **6-5** (34) で $\vec{\chi}(x)=0$ にとるユニタリー・ゲージでは†，$\boldsymbol{\Phi}$ は

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+\phi(x) \end{pmatrix} \tag{67}$$

となり，これを代入すれば (51) の“標準形”湯川相互作用項は簡単な

$$\mathcal{L}_{\text{quark}}^{\text{mass}} = -\sum_f (m_f + f_f\,\phi/\sqrt{2})\,\bar{q}_f q_f \quad - \quad (f \to F) \tag{68}$$

の形となる。[ここで (28) のクォーク版 $m_f = f_f v/\sqrt{2}$ を用いた。] これはクォークの質量項と実結合定数の湯川相互作用 $\bar{q}q\phi$ を与え，明らかに $\mathcal{CP}$ 不変である。

それゆえ，Weinberg-Salam 模型で $\mathcal{CP}$ の破れを起こす唯一の可能性は，クォーク場の荷電カレント相互作用部分

$$\frac{g}{2\sqrt{2}}\left[W^{\mu}\bar{q}_F\gamma_{\mu}(1-\gamma_5)U_{Ff}\,q_f + \text{h.c.}\right] \tag{69}$$

の結合定数 gU_{Ff} が，すなわち混合行列要素 U_{Ff} が，複素数になることであ

---

† ユニタリー・ゲージ以外では，“非物理的” Higgs 場 $\vec{\chi}$ が残っており，$\vec{\chi}$ の関わる湯川相互作用項は (小林-益川行列 U_{Ff} が複素数のとき) $\mathcal{CP}$ を破る。しかし，これは次に議論する荷電カレント相互作用項 (69) と本質的に一体の効果である。

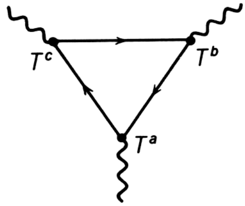
る(演習問題 6.9 参照)。ところが，(46),(49) の定義の示すように，混合行列 U_{Ff} は，左手型クォークの，上系列場 q_F の $SU(2)_W$ 2 重項相棒(下成分) q'_F と下系列場 q_f との相対的関係を与えるものであるから，q_F 場の位相(したがって相棒の q'_F も共通に)と q_f 場の位相を取り直す自由度を使えば行列要素 U_{Ff} の位相は変えることができる。例えばクォークが 2 世代のときは，$U=(U_{Ff})$ は 2×2 ユニタリー行列で，元来四つの実パラメータを持つ。しかし，q_F 場 u, c と q_f 場 d, s の四つの位相自由度を使えば $4-1=3$ 個のパラメータを吸収できる(1 を引くのは四つの場全体の共通の位相変更は U を変えないからである)から，結局 1 実パラメータとなり，それが (47) の Cabibbo 角 θ_C に対応する。すなわち，クォークが 2 世代だとすると U_{Ff} は実数となり，$C\mathcal{P}$ の破れを導入することはできない。小林-益川は，このことに初めて注意し，第 3 世代クォークの必要性を指摘したのである。一般にクォークが n 世代のときは，q_F と q_f 全部で $2n$ 個場があるから，$n\times n$ 行列 U の n^2 個の実パラメータのうち $2n-1$ 個を吸収でき $n^2-(2n-1)$ 個だけ残る。一方 $n\times n$ の実回転行列(直交行列)は $n(n-1)/2$ 個の実パラメータを持つことに注意すれば，結局，$n\times n$ 混合行列 U は

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}n(n-1) \text{ 個の実回転角 } \theta_i & \text{(一般化 Cabibbo 角)} \quad (70) \\ \dfrac{1}{2}(n-1)(n-2) \text{ 個の位相因子 } e^{i\delta_j} & \text{(一般化小林-益川位相)} \quad (71) \end{cases}$$

を含むことがわかる。後者の位相因子 $e^{i\delta_j}$ が問題の $C\mathcal{P}$ を破る位相因子で，果たして，その個数は $n=1,2$ のときは 0 で，$n=3$ 世代になって初めて 1 個現れることになる。

小林-益川自身は，$C\mathcal{P}$ の破れの起源として，このクォーク混合行列の位相因子以外にも，例えば Higgs 2 重項を 2 種以上導入してその間の相互作用項の結合定数に位相を与える可能性も指摘している。

アノマリーの相殺 古典論の段階で存在するカレント保存が量子論 (loop グラフ) の段階で成立しなくなることがあり，その現象を一般にアノマリー (anomaly) と呼ぶ。最後の 9 章で一般的に論ずるが，フェルミオン場がカイラル(左手型，右手型)の場合には，6·14 図に示した三角形の loop グラフ等がカイラル・アノマリーと呼ばれるアノマ



6·14 図

リーを引き起こす。ゲージ理論において，ゲージ場の結合するカレントにこのアノマリーが存在すれば，ゲージ対称性，したがってBRS不変性が壊され，物理的S行列のユニタリー性，ひいては理論のくりこみ可能性まで成り立たなくなって，理論として意味を持たなくなる。

Weinberg-Salam模型は，まさにカイラル・フェルミオンに結合するゲージ理論であるから，このアノマリーの危険性をはらむが，実は大変うまい具合に，アノマリーへのレプトンの寄与と（カラー3自由度の）クォークの寄与とが相殺しているのである。これを説明しよう。

9-2で示すように，一般に群Gのゲージ場A^a_μが，表現T^a_{L}に属する左手型フェルミオンLと表現T^a_{R}の右手型フェルミオンRとに

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}}=A^a_\mu(\bar{L}\gamma^\mu T^a_{\mathrm{L}}L+\bar{R}\gamma^\mu T^a_{\mathrm{R}}R)$$

で結合しているとき，ゲージ場$A^a_\mu A^b_\nu A^c_\rho$の3点頂点に対応する6·14図のアノマリーは，**9-2**(43)

$$d^{abc}\equiv\mathrm{tr}(\{T^a_{\mathrm{L}}T^b_{\mathrm{L}}\}T^c_{\mathrm{L}})-\mathrm{tr}(\{T^a_{\mathrm{R}}T^b_{\mathrm{R}}\}T^c_{\mathrm{R}})\equiv\mathop{\mathrm{tr}}_{\mathrm{L-R}}(\{T^aT^b\}T^c)\quad(72)$$

に比例する。今のWeinberg-Salam模型の場合，ゲージ場は群$SU(2)_{\mathrm{W}}\times U(1)_Y$の$(\vec{A}_\mu, B_\mu)$であり，$\vec{A}\vec{A}\vec{A}, \vec{A}\vec{A}B, \vec{A}BB, BBB$の4タイプのアノマリーを調べねばならない。$\vec{A}_\mu$の結合する行列$\vec{T}$は，弱アイソスピンで，左手型$SU(2)_{\mathrm{W}}$ 2重項の場合は$\vec{\tau}/2$，右手型フェルミオンのときは0である。B_μの結合するのは弱超電荷Yである。まず，純$SU(2)$タイプの$\vec{A}\vec{A}\vec{A}$アノマリーは，各$SU(2)$ 2重項ごとに$\mathrm{tr}(\{\tau^i\tau^j\}\tau^k)=2\delta^{ij}\mathrm{tr}(\tau^k)=0$だから，存在しない。$\vec{A}BB$タイプも$\mathrm{tr}(\vec{\tau})=0$で落ちる．2番目の$A^iA^jB$アノマリーは，(9)の関係式$Y=Q-T^3$を用い，

$$\mathop{\mathrm{tr}}_{\mathrm{L-R}}(\{\tau^i,\tau^j\}Y)=2\delta^{ij}\mathrm{tr}_{\mathrm{L}}\left(Q-\frac{\tau^3}{2}\right)=2\delta^{ij}\mathrm{tr}_{\mathrm{L}}(Q)\quad(73)$$

に比例することがわかる。もちろんこのトレースtr_{L}は，$\vec{T}=\vec{\tau}/2\neq0$である左手型フェルミオンのみにわたる和を表す。最後のBBBアノマリーは

$$\mathop{\mathrm{tr}}_{\mathrm{L-R}}(YYY)=\mathop{\mathrm{tr}}_{\mathrm{L-R}}[(Q-T^3)^3]=\mathop{\mathrm{tr}}_{\mathrm{L-R}}(Q^3)-\frac{3}{4}\mathrm{tr}_{\mathrm{L}}(Q\tau^3\tau^3)\quad(74)$$

に比例する（ただし最後の変形には$\mathrm{tr}(YYT^3)=0$を用いた)。しかし$\mathop{\mathrm{tr}}_{\mathrm{L-R}}(Q^3)$は，(72)より左手型フェルミオンの寄与と右手型フェルミオンの寄与の差の意味であるから，そして，電荷Qを持つフェルミオンは，左手型があれば必ず右手型もあるから，相殺して0となる。したがって，(73)，(74)どちらのアノマリーも結局$\mathrm{tr}_{\mathrm{L}}(Q)$に比例することになる。$\mathrm{tr}_{\mathrm{L}}(Q)$へ

の左手型レプトンの寄与は各世代ごとに同じで，それぞれの世代が

$$Q(\nu_e)+Q(e)=0+(-1)=-1 \tag{75}$$

だけ効く。他方，クォークは各世代ごとにカラーの自由度で3重にあることを考慮して，

$$3\times[Q(u)+Q(d)]=3\times\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=+1 \tag{76}$$

だけ寄与する。したがって，クォークとレプトンの寄与がちょうど相殺し，アノマリーが現れないことを意味している。

この相殺のために，クォークとレプトンの対応が常に成立している必要があり，まだ発見されていない t クォークはこのためにも存在しなければならない。このクォーク・レプトン対応やアノマリーの相殺は，Weinberg-Salam 模型の段階では，全くの偶然的できごとに過ぎないが，クォークとレプトンの間により深い関係が存在することを強く示唆している。このことが，$SU(5)$ や $SO(10)$ などのゲージ群に基づく大統一理論 (grand unified theory) への一つの大きな動機となったのである。

電荷の普遍性 最後に，Weinberg-Salam 模型での電荷の普遍性 (charge universality) の問題に触れておこう。ここで電荷の普遍性というのは，**光子の荷電粒子との質量殻上の結合定数**が厳密に普遍的であるということである。例えば，電子（または μ 粒子）と陽子の電荷＝結合定数は非常な精度で（逆符号で）一致していることが知られている。この問題は，$U(1)$ 群に基づく QED の場合はほとんど自明であった。すなわち，$U(1)$ 群の場合は WT 恒等式が非常に簡単で，それからただちに，荷電粒子 ϕ_i の裸の結合定数† e_i^0 と，観測される質量殻上の結合定数 e_i とが比例するという関係が容易に導かれる（演習問題 6.10）：

$$e_i=Z_3^{1/2}e_i^0=Z_3^{1/2}e^0q_i. \tag{77}$$

ここで，Z_3 は光子場のくりこみ定数で，q_i は，裸の結合定数 e_i^0 が $e_i^0=e^0q_i$ と与えられる，荷電粒子の生成演算子 $\phi_i^\dagger$ の運ぶ電荷演算子 Q の**量子数**である：

$$[Q,\phi_i^\dagger]=q_i\phi_i^\dagger. \tag{78}$$

明らかに，Z_3 や Z_3e^0 は荷電粒子 ϕ_i と無関係な定数であるので，(77) は，望みの電荷の普遍性を証明している。すなわち，質量殻上の結合定数 e_i

† 裸の結合定数とは Lagrangian に現れる結合定数のことである。（7章参照）

は,電荷量子数 q_i に普遍的比例係数で比例していること，特に，量子数 q_i の等しい荷電粒子は，等しい質量殻上結合定数を持つことを示している[†]。

ところが，Weinberg-Salam 模型では，WT 恒等式はかなり複雑になり，それを直接用いることによって，望みの比例関係

$$e_i = (\text{定数})\cdot e_i^0 = (\text{定数})\cdot e^0 q_i \tag{79}$$

を導くことは容易なことでない。事実，Landau ゲージ ($\alpha=0$) 以外ではこの方法での証明は与えられていないようである。そこで，ここでは，"Maxwell" 方程式を利用する青木によって初めて与えられたもっと強力な証明法を紹介しよう。

この方法では，Weinberg-Salam 模型の $SU(2)_{\mathrm{W}}\times U(1)_Y$ 大局的不変性を尊重する任意の共変的ゲージ

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GF}} = -(\partial^\mu B^a)A_\mu^a + \frac{1}{2}\alpha_0 B^a B^a \tag{80}$$

の下で (79) が証明できる。(80) で群の添字 a は ($U(1)_Y$ に対応する) 0 から ($SU(2)_{\mathrm{W}}$ に対応する) 1, 2, 3 まで走るものとする。したがって A_μ^0 は (11) で B_μ と記した $U(1)_Y$ のゲージ場を表すとする。ここで **5-5** (58) で与えた "Maxwell" 方程式を思い起こす：

$$\begin{aligned} \partial^\nu F_{\mu\nu}^a &= gJ_\mu^a - \{Q_{\mathrm{B}}, D_\mu \bar{c}^a\} \qquad (a=1,2,3 \text{ に対し}) \\ \partial^\nu F_{\mu\nu}^0 &= g'J_\mu^0 - \{Q_{\mathrm{B}}, \partial_\mu \bar{c}^0\}. \end{aligned} \tag{81}$$

$SU(2)_{\mathrm{W}}\times U(1)_Y$ 対称性は，$U(1)_{\mathrm{EM}}$ へ自発的に破れているので，最終的には,唯一つの電荷演算子,すなわち電磁的電荷演算子 Q のみが well-defined になる。量子数の間の関係式 (9)，$Q=T^3+Y$ (これは正確には粒子 ϕ_i ごとに対する量子数の間の関係式 $q_i = t_i^3 + y_i$ であり，場の理論の演算子 Q, T^3, Y の関係式でないことに注意。実際，自発的対称性の破れのために T^3 や Y などは well-defined な演算子としては存在しない) に注意して，"Maxwell" 方程式 (81) の $a=3$ 成分と 0 成分の次の線形結合を考える：

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = e^0(J_\mu^3 + J_\mu^0) - \{Q_{\mathrm{B}}, \bar{C}_\mu\} \tag{82}$$

$$F_{\mu\nu} \equiv (g' F_{\mu\nu}^3 + gF_{\mu\nu}^0)/\sqrt{g^2+g'^2}, \tag{83}$$

$$\bar{C}_\mu \equiv (g' D_\mu \bar{c}^3 + g\partial_\mu \bar{c}^0)/\sqrt{g^2+g'^2}. \tag{84}$$

ここで $e^0 \equiv gg'/\sqrt{g^2+g'^2}$ は (21) で与えた電磁結合定数 e と同じであるが，

---

† ただ，$U(1)$ 群の場合は，電荷演算子 Q の自明でない交換関係が存在しないため，その固有値 q_i が，整数に (もしくは有理数にさえも) 量子化されねばならぬ必然性はない。

Lagrangian に現れる裸の結合定数であることを強調するため e^0 と記した。この線形結合 (82) では，実際，(83) の $F_{\mu\nu}$ は場について線形な部分がちょうど (16) で与えた電磁場 $A_\mu=(g' A_\mu^3+gA_\mu^0)/\sqrt{g^2+g'^2}$ の $\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ になっており，$J_\mu^3+J_\mu^0$ の例えば物質場部分は (31),(53) で与えた電磁相互作用カレント $j_{\mathrm{em}}^{\mu(\mathrm{lepton})}+j_{\mathrm{em}}^{\mu(\mathrm{quark})}$ と一致していることに注意しよう。すなわち，形式的電荷演算子 $\int d^3x\,(J_{\mu=0}^3+J_{\mu=0}^0)$ は，正準交換関係を用いて，正しく電磁的電荷量子数 q_i をカウントする (78) を再現する。しかしながら，**6-6** で詳述したように，$J_\mu^3+J_\mu^0$ には素 4 重項メンバー $\beta^a\,(a=3,0)$ のある線形結合 β の零質量 1 粒子項 $\partial_\mu\beta$ の寄与が存在するので，3 次元積分の収束する well-defined な電荷演算子 Q は，

$$Q=\int d^3x\,[(J_0^3+J_0^0)-\omega\partial^k F_{0k}]\equiv\int d^3x\,J_0^{\mathrm{EM}} \tag{85}$$

とせねばならない。ただし，F_{0k} は (83) の $F_{\mu\nu}$ の $(0,k)$ 成分で，零質量電磁場 A_μ を含んでいるから，$\partial^\nu F_{\mu\nu}$ は，上の零質量素 4 重項の 1 粒子状態 $\partial_\mu\beta$ をある重みで含み，(85) 中辺第 2 項の係数 ω は，$J_0^3+J_0^0$ の含む $\partial_\mu\beta$ をちょうど相殺するように選ぶ。[このとき，$\partial^\nu F_{\mu\nu}$ の含む β が，$J_\mu^3+J_\mu^0$ の含む β^3 と β^0 の線形結合 β に一致していることは，とにかく，電磁的量子数 q_i に対応する $U(1)_{\mathrm{EM}}$ 対称性が自発的破れを起こさずに残っているという仮定，すなわち (85) の形の $J_0^3+J_0^0$ を含む電荷が well-defined なものとして存在するという仮定，から従う一つの必要条件である。]

(85) で定義したカレント $J_\mu^{\mathrm{EM}}\equiv(J_\mu^3+J_\mu^0)-\omega\partial^\nu F_{\mu\nu}$ を用いれば，"Maxwell" 方程式 (82) は次の形となる：

$$(1-e^0\omega)\partial^\nu F_{\mu\nu}=e^0 J_\mu^{\mathrm{EM}}-\{Q_{\mathrm{B}},\,\bar{C}_\mu\}. \tag{86}$$

この式を，二つの任意の**物理的** 1 粒子状態 $|i\rangle$ と $|f\rangle(\in\mathcal{V}_{\mathrm{phys}})$ ではさめば

$$(1-e^0\omega)\langle f|\partial^\nu F_{\mu\nu}(x)|i\rangle=e^0\langle f|J_\mu^{\mathrm{EM}}(x)|i\rangle \tag{87}$$

を得る。ただし，$Q_{\mathrm{B}}|i\rangle=Q_{\mathrm{B}}|f\rangle=0$ より

$$\langle f|\{Q_{\mathrm{B}},\,\bar{C}_\mu\}|i\rangle=0 \tag{88}$$

となることを用いた。(87) の両辺に $\int d^4x\,e^{ikx}$ を演算し，$k_\mu\to0$ の極限をとることを考える。NG ボソンに対する低エネルギー定理のところでの議論と同様，$k_\mu\to0$ 極限で (87) の左辺に寄与できるのは，$F_{\mu\nu}$ チャネルの零質量 1 粒子，すなわち光子，の作る pole 部分だけである。Heisenberg 場 $F_{\mu\nu}(x)$ に含まれる，くりこまれた光子の漸近場 $A_\mu^{\mathrm{as}}(x)$ の重みを Y とし

よう；すなわち

$$F_{\mu\nu}(x) \underset{x_0\to\pm\infty}{\longrightarrow} Y(\partial_\mu A^{\mathrm{as}}_\nu(x)-\partial_\nu A^{\mathrm{as}}_\mu(x))+\cdots. \qquad (89)$$

$\cdots$は，ここでは無関係な質量を持つ粒子の漸近場の寄与である。係数 Y は，例えば 2 点関数 $\langle 0|\mathrm{T}\,F_{\mu\nu}(x)F_{\rho\sigma}(y)|0\rangle$ の $k^2=0$ の pole の留数から読みとれる。(89) が

$$\int d^4x\; e^{ikx}\langle 0|\mathrm{T}\,F_{\mu\nu}(x)A^{\mathrm{as}}_\rho(0)|0\rangle=-Y(k_\mu g_{\nu\rho}-k_\nu g_{\mu\rho})/k^2 \quad (90)$$

を意味していることに注意すれば，(87) の左辺が

$$\lim_{k\to 0}\int d^4x\; e^{ikx}\langle f|\partial^\nu F_{\mu\nu}(x)|i\rangle(1-e^0\omega)$$
$$=Y(1-e^0\omega)\cdot\lim_{p_f\to p_i}(2\pi)^4\delta^4(p_f-p_i)\cdot e_{fi}(p_i+p_f)_\mu \qquad (91)$$

となることがわかる。ただし，くりこまれた光子と粒子 i,f の 3 点頂点関数 $\Gamma^{(3)}_{\mu fi}$ が質量殻 $k^2=0$ 近傍で一般に $e_{fi}(p_i+p_f)_\mu$ の形をとることを用いた。この e_{fi} は，$|i\rangle,|f\rangle$ が不変規格化された状態のとき，質量殻上光子の物理的結合定数である。一方，(87) の右辺の方は，$\mu=0$ 成分を考えると，well-defined な電荷演算子 Q が (85) で与えられることおよび Q が電荷量子数 q をカウントすること [(78)] を用いて，次式を導く：

$$\lim_{k\to 0}\int d^4x\; e^{ikx}\,e^0\langle f|J^{\mathrm{EM}}_0(x)|i\rangle$$
$$=\int dx_0\,e^0\langle f|Q|i\rangle$$
$$=e^0 q_i\,\delta_{fi}\lim_{p_f\to p_i}(2\pi)^4\delta^4(p_f-p_i)\cdot 2p_{i0}. \qquad (92)$$

ただし，q_i は $|i\rangle$ の電荷量子数であり，**4-6** (19) の不変規格化条件 $\langle f|i\rangle=(2\pi)^3 2p_{i0}\,\delta^3(p_f-p_i)$ を用いた。(91) の $\mu=0$ 成分と (92) を比較して

$$e_{fi}=[Y(1-e^0\omega)]^{-1}\,\delta_{fi}\,e^0 q_i \qquad (93)$$

を得る。この式は，質量殻上光子の結合定数 e_{fi} が，荷電粒子の種類に関して**対角的**である (δ_{fi} 因子) ことと同時に，Y や ω (や e^0) が明らかに i や f に依存しない定数であるので，望みの電荷普遍性 (79) を証明している。

この証明法の要領のよいところは，物理的粒子 $|i\rangle$，$|f\rangle$ 上で Q_{B} が消えることを用いた (88) のステップである。(88) は，複雑な WT 恒等式に埋もれた必要な情報を非常に簡潔に取り出していることに相当している。また QED の場合でも，もちろん，上の証明が成り立っている。その場合は，単に，$SU(2)$ 部分を消去し ($g=0$，$J^{a=1,2,3}_\mu=0$)，$U(1)$ 部分のみを残

せばよい ($g' \to e^0$, $J^0_\mu \to j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$)。そうすれば，(82) は QED の通常の Heisenberg 方程式

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = e^0 j_\mu - \partial_\mu B, \qquad (F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,\ B = \{Q_B, \bar{c}\}), \quad (94)$$

になり，この場合，上で問題にした零質量粒子 β は自由 NL 場 B である。容易にわかるように $\partial^\nu F_{\mu\nu}$ は B を $-Z_3\partial_\mu B$ だけ含む (演習問題 5.9) から，(94) より $e^0 j_\mu$ は B を $(1-Z_3)\partial_\mu B$ だけ含み，したがって，(85) のパラメータ ω は，QED の場合

$$e^0\omega = 1 - Z_3^{-1} \quad (95)$$

で与えられることがわかる。また，このとき，(89) パラメータ Y は明らかに $Z_3^{1/2}$ であるから，実際，上で得た関係式 (93) は，QED の関係式 (77) に帰着することになる。最後に，上の証明は，荷電粒子 $|i\rangle, |f\rangle$ が Lagrangian に現れる素な場だということを全然仮定していない点に注意しておく。それゆえ，$|i\rangle$ や $|f\rangle$ は，クォーク三体の結合状態である陽子でもよく，その光子結合定数 $e_{陽子}$ が $|e_{電子}|$ と一致していることを証明している。

演習問題 6.

6.1 演習問題 2.5 の超対称模型は， 超多重項 (supermultiplet) 場 ($\varphi(x)$, $\xi_\alpha(x), f(x)$) が一組の例であるが，添字 i をつけて n 組の超多重項場 ($\varphi^i(x)$, $\xi^i_\alpha(x), f^i(x)$) ($i=1, 2, \cdots, n$) を含む場合に容易に拡張できる。

1) 問題 2.5 の Lagrangian を拡張した形の次の Lagrangian

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\varphi_i^\dagger\,\partial^\mu\varphi^i + \frac{i}{2}\xi_i^\dagger\,\bar{\sigma}^\mu\overleftrightarrow{\partial_\mu}\xi^i + f_i^\dagger f^i$$
$$+ \left[m_{ij}\left(\varphi^i f^j + \frac{1}{2}\xi^{Ti}\epsilon\xi^j\right) + g_{ijk}(\varphi^i\varphi^j f^k + \varphi^i\xi^{Tj}\epsilon\xi^k) + \lambda_i f_i + \text{h.c.}\right]$$

の作用積分は，各 i の多重項ごとに問題 2.5 の 1) の変換を行う超対称変換の下で不変である。これを示せ。$m_{ij}, g_{ijk}, \lambda_i$ は添字について対称な任意パラメータである。

2) この場合の超対称不変性に対応する Noether カレント $J_{\alpha\mu}$，電荷 $Q_\alpha \equiv \int d^3x\, J_{\alpha\,\mu=0}$ の表式を求め，$Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta} \equiv (Q_\beta)^\dagger$ の反交換関係が，問題 2.5 の 2) の性質に対応して

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} P_\mu, \qquad \{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = 0$$

を満たすことを示せ。P_μ は 4 次元運動量 $\int d^3x\ T_\mu{}^0$ である。

3) 補助場 f^i のどれかが 0 でない真空期待値を得れば，超対称性が自発的に破れること，$Q_\alpha|0\rangle \neq 0$，を示し，その場合，対応する $\xi^i(x)$ は零質量の NG フ

ェルミオンになっていることをいえ。

4） 超多重項場が3組 $i=0,1,2$ ある場合で，パラメータが $m_{12}=m_{21}\equiv m$, $g_{110}=g_{011}=g_{101}\equiv g$, $\lambda_0\equiv\lambda$, 他は0，である Lagrangian $\mathcal{L}$ で記述される系（最も簡単な O'Raifeartaigh 模型）を考える。その場合，tree レベルの有効ポテンシャルの停留点を調べ，超対称性が自発的に破れることを確かめよ。

5） $\sum_{\alpha=1}^{2}\{Q_\alpha, Q_\alpha^\dagger\}=2P_0$ の真空期待値を考えて，$\langle 0|P_0|0\rangle\neq 0$, $=0$ が，それぞれ，超対称性が自発的に破れる場合，破れない場合に対応することをいえ。また $\langle 0|P_0|0\rangle\neq 0$ は時間並進不変性の自発的破れを意味するのかどうか議論せよ。

6.2 6-2(49)の積分を行い 6-2(51)を導け。

6.3 6-3(7),(20),(28)の行列要素が，Lorentz 不変性，$U(n)_V$ 対称性，（必要なら $\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{T}$ 不変性）を用いて，必ずそれぞれのところで与えた表式の形に一般にできることを論ぜよ。

6.4 6-4(37)の $\mathcal{L}_{カイラル}$ の展開式 6-4(28)の第2項の相互作用項を用いて，tree レベルで π 中間子散乱振幅 $\mathfrak{M}(\pi^i(p_i)+\pi^a(q)\to\pi^f(p_f)+\pi^b(k))$ を計算し，それが低エネルギー定理の結果 6-3(31)を再現していることを確かめよ。

6.5 6-4(29)～(37)で述べたカイラル対称性 $G/H=U(n)_L\times U(n)_R/U(n)_V$ の非線形表現の場合，核子の非線形基底の場は，$H=U(n)_V$ の基本表現に属する右手型 $\chi_R\equiv(1/2)(1+\gamma_5)\chi$ および左手型 $\chi_L\equiv(1/2)(1-\gamma_5)\chi$ の組で導入し，線形基底 ψ は $\psi=\xi(\pi)\chi_R+\xi^{-1}(\pi)\chi_L=e^{i\gamma_5\pi/f_\pi}\chi$ で与えられる。この核子場に対する 6-4(43)第1式，第2式に相当した Lagrangian を書き下し，それが Goldberger-Treiman 関係式を満たしていることを示せ。

6.6 共変ゲージ $\mathcal{L}_{GF}=B\partial^\mu A_\mu+(\alpha/2)B^2$ の QED（または $U(1)$ ゲージ理論）においては，もとの局所ゲージ変換 $\delta A_\mu(x)=\partial_\mu\theta(x)$ のうち，まだ，x について線形な $\theta(x)=a_\mu x^\mu+b$ の変換に対する不変性が残っている。パラメータ a_μ, b の大局的不変性に対応する Noether 電荷 Q_μ, Q を求め，ベクトル電荷 Q_μ の対称性は常に自発的に破れていることを示せ。また，1) Q の対称性が自発的に破れていない場合には，Q_μ の破れに対応する NG ボソンは，零質量ベクトルの光子そのものであること，2) Q の対称性が自発的に破れている場合（Higgs相）は，Q の（スカラー）NG ボソンが，同時に Q_μ の NG ボソンでもあること，を証明せよ。

6.7 Higgs 模型の R_ξ ゲージでの Lagrangian 6-5(12)+(16)において，$\alpha\to\infty$ の極限をとれば，FP ゴーストの α に比例する相互作用項 $ie\alpha M\bar{c}\phi c$ の効果として $-i\delta^4(0)\ln(v+\phi(x))$ が残る他は，ユニタリー・ゲージの Lagrangian 6-5(8)に一致することを示せ。ユニタリー・ゲージは，また，Lagrangian 6-5(12)で $\chi=0$ のゲージをとったものともみなせる。この $\chi=0$ ゲージでの Foddeev-Popov 行列式が Lagrangian に $-i\delta^4(0)\ln(v+\phi(x))$ の寄与をすることをいえ。

6.8 6-6(9)の Green 関数 F.T. $\langle 0|\mathrm{T}\,D_\mu c^a(x)g(A_\nu\times\bar{c})^b(y)|0\rangle$ が $g_{\mu\nu}-p_\mu p_\nu/p^2$ に比例することを，演習問題 5.7 の手法を用いて経路積分法で示せ。

6.9　6-7 (69) の荷電カレント相互作用は，小林-益川混合行列 U_{Ff} が複素数なら $\mathcal{CP}$ を破ることを証明せよ。

6.10　WT 恒等式 5-7 (18) は，QED の場合，NL 場 B や FP ゴースト場 c, $\bar{c}$ が自由場であることに注意し，さらに電磁場 A_μ のくりこみ $A_\mu = Z_3^{1/2} A_\mu^{\mathrm{ren}}$ を考慮すれば，電荷の普遍性を表す関係式 6-7 (77) を意味することを示せ。ただし 5-7 (18) の結合定数 g は，この場合 QED の裸の結合定数 e^0 であり，表現行列 T^a は，その場 ψ_i の電荷量子数 q_i である。

7. くりこみ

7-1　次元正則化

今まで，量子補正，すなわち loop グラフの計算を行わないで，形式的に理論が存在するものとして議論を進めてきた。しかし，具体的に loop グラフを計算すると，とたんに紫外発散 (loop 運動量の大きなところでの積分が発散する) という問題にぶつかる。この問題を議論するには，まず，“無限大” の量を直接扱うことはできないので，正則化 (regularization) と呼ばれる手続きでとにかく Feynman グラフの積分が収束して well-defined になるようにする。その次に，諸量を物理的な粒子の質量や結合定数で書き直すというくりこみ (renormalization) 操作を行い，くりこんだ後の量が，初めの正則化をはずす極限でも有限な well-defined な量にとどまるということを証明するのである。この節では，くりこみの一般論に入る前に，正則化，特に次元正則化 (dimensional regularization) について説明する。

Pauli-Villars 正則化　Feynman グラフの loop 積分を有限にする正則化法としてわかりやすい一つの例は，被積分関数の中の伝播関数を

$$\frac{1}{m^2-k^2-i\epsilon} \longrightarrow \frac{1}{m^2-k^2-i\epsilon}-\frac{1}{\Lambda^2-k^2-i\epsilon} = \frac{(\Lambda^2-m^2)}{(m^2-k^2-i\epsilon)(\Lambda^2-k^2-i\epsilon)} \tag{1}$$

に置き換えるものである。Λ^2 は十分大きくとっておく。これを行うと伝播関数は，$k^2 \gg \Lambda^2$ で $\sim 1/k^4$ で振舞い，もとの $\sim 1/k^2$ より速く落ちるから積分の収束性がよくなる。(1) の第 2 項の引き算項は，ちょうど質量 Λ を持つ負計量粒子の伝播関数とみることもでき，そのようにみたとき，この “粒子” の場を regulator と呼ぶ。regulator の質量 Λ は切断パラメータ (cutoff parameter) とも呼ばれる。(1) でも足りないときは，もっと regulators を入

れて $k^2 \to \infty$ でもっと速く落ちるようにする。フェルミオン場に対しても同様にやれる。このような正則化を Pauli-Villars (ヴィラース) 正則化という。Gupta はこれの改良として，可換ゲージ理論の場合のゲージ不変性を保つべく，荷電フェルミオンに対しては (1) のように伝播関数のそれぞれを置き換えるのではなく，ループを回るフェルミオンの質量 m をループ内で一斉に Λ に置き換えたものを引く，という方法を提案した。これは，ボーズ統計に従うスピノール regulator を入れたことに相当する。

次元正則化 Pauli-Villars-Gupta 正則化は直観的で計算も簡単でよいのだが，最大の難点は，非可換ゲージ理論のベクトル場に適用したとき，ゲージ不変性を壊すところにある。そこで，ここでは 't Hooft と Veltman (ヴェルトマン) によって提案された次元正則化を採用することにし，これについて説明しよう。

次元正則化は，時空の次元 n を解析接続によって複素数に拡張するものである。この正則化の最大の利点は，ゲージ不変性が次元によらず成立するため，ゲージ不変性を壊さないことである。しかも，被積分関数中の伝播関数の数を増やさず，一般的な積分公式が得られるので，具体的計算法としても極めて有用なものである。

一般に Feynman グラフの任意の loop 積分は，Feynman パラメータ公式 (付録 C 参照) を適用した後，

$$\int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \frac{(1, k_\mu, k_\mu k_\nu, \cdots)}{[m^2+2k\cdot p-k^2-i\epsilon]^\alpha} \tag{2}$$

の形のものに帰着させることができる。そこで，まず最も簡単な

$$I=\int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n}(m^2-k^2-i\epsilon)^{-\alpha} \tag{3}$$

を評価することから始める。Γ 関数の積分表示

$$\Gamma(\alpha)s^{-\alpha}=\int_0^\infty e^{-st}t^{\alpha-1}\,dt \tag{4}$$

を思い起こそう。この表示 (4) 自体は $\mathrm{Re}\, s \geqq 0$ $(s \neq 0)$, $0<\mathrm{Re}\,\alpha<1$ でのみ妥当なのだが，この領域でかつ $\mathrm{Im}\, s \leqq 0$ ならば，t の積分経路を複素平面上で 90° 回転して虚軸に持っていけて

$$s^{-\alpha}=\left[\frac{i^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right]\int_0^\infty e^{-ist}t^{\alpha-1}\,dt \tag{5}$$

となる。この表式になれば，$\mathrm{Re}\, s \geqq 0$ の条件は不要で，$\mathrm{Im}\, s<0$, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$ の領域で妥当となる。$s=m^2-k^2-i\epsilon$ とおけば，$\mathrm{Im}\, s=-\epsilon<0$ の条件が

成立しているから[†]，(3) に (5) を適用し，積分順序を変更して

$$I=\left[\frac{i^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\right]\int_0^{\infty}dt\ t^{\alpha-1}\int\frac{d^nk}{i(2\pi)^n}e^{-i(m^2-k^2-i\epsilon)t} \tag{6}$$

を得る。この運動量積分は **4-1** (26) の Gauss-Fresnel 積分であるから[††]

$$I=\left[\frac{i^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(4\pi i)^{-\frac{n}{2}}\right]\int_0^{\infty}dt\ t^{\alpha-1-\frac{n}{2}}e^{-i(m^2-i\epsilon)t}. \tag{7}$$

この t 積分に公式 (5) ($\alpha\ \to\ \alpha-n/2$) を逆に適用すれば，結局

$$I=\left[\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}(4\pi)^{-\frac{n}{2}}\right](m^2-i\epsilon)^{-\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)} \tag{8}$$

となる。(7) から (8) を得るには $\mathrm{Re}\,(\alpha-n/2)>0$ の条件が必要であったことに注意しよう。これは当然で，そもそも (3) の積分の収束のためには，被積分関数のべき α の 2 倍が次元 (整数) n より大きいことが必要であったのである。しかし，いったん (8) の表式が得られれば，それは n について解析関数であるから，任意の複素数次元 n への拡張を与えている。このとき，もとの運動量積分 (3) が発散していたという事情が，解析接続 (8) においては次元 n に関する pole となって表現されるということが次元正則化の特徴的な点である。実際 Γ 関数 $\Gamma(z)$ は $z=0, -1, -2, \cdots$ で pole を持ち，

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}, \tag{9}$$

$$\Gamma(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}-\gamma+O(\varepsilon) \qquad (\gamma：\text{Euler 定数}=0.5772\cdots) \tag{10}$$

を満たす。例えば，(3) の積分が $\alpha=2$ のとき，$n=4$ 次元で対数的に発散するという事情に対し，表式 (8) は

$$I=(4\pi)^{-2}\left[\left(\frac{2}{4-n}-\gamma+\ln 4\pi\right)-\ln(m^2-i\epsilon)+O(4-n)\right] \tag{11}$$

となり pole $1/(4-n)$ を持つ。ここで $x^{\epsilon}=e^{\epsilon\ln x}=1+\epsilon\ln x+O(\epsilon^2)$ の変形を用いた。γ や $\ln 4\pi$ の定数は常にこの pole 部分に付随して現れるので

$$\bar{\varepsilon}^{-1}\equiv\frac{2}{4-n}-\gamma+\ln 4\pi \tag{12}$$

のまとまりを“無限大部分”とみなすのが便利である。

---

† いくつかの文献に見られるように運動量積分を Euclid 化する必要はない，ということに注意しておこう。すなわち，ここでは直接 Minkowski 空間で運動量積分を行っている。もともと Minkowski 空間の運動量積分を，正則化する前に Euclid 化することはできないし，他にたくさん運動量がからんでくるときも正当化が難しい。

†† 時間成分 k_0 の積分は，**4-1** (26) の公式の複素共役を用いる。

さて，公式(8)は，I の表式(3)で積分変数 k を $k-p$ に変え，m^2-p^2 を m^2 と呼び直せば，次式の形となる：

$$\int\frac{d^nk}{i(2\pi)^n}\frac{1}{(m^2+2k\cdot p-k^2)^\alpha}=\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(m^2+p^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}} \tag{13}$$

ただし $-i\epsilon$ は省略した。この公式を両辺で $\partial/\partial p^\mu$ 微分すれば，(2)の形の種々な分子 $(k_\mu, k_\mu k_\nu, \cdots)$ を持つ積分に対する公式を順次導くことができる。これらの公式は実用上便利であるから付録Cにまとめた。

テンソル添字で縮約されずに残っているものは，そのまま，抽象的に n 次元時空での添字だとみなしておく。計量テンソル $g^{\mu\nu}$ もそうである。縮約を受けた場合は，それゆえ，n 次元の内積となり，特に，

$$g^\mu{}_\mu=n \tag{14}$$

としなければならない。

ただし，完全反対称テンソルはテンソル添字の個数が次元数 n に等しい場合だけ定義できるものなので，一般の複素数 n に自然に拡張することはできない。そこで，我々の4次元の $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は，n 次元時空でも，添字 $(\mu\nu\rho\sigma)$ が $(0,1,2,3)$ の置換 σ になっているときのみ0でなく $\mathrm{sgn}\,\sigma$ の値をとる定数テンソルであると定義しておく。

Dirac スピノールを複素 n 次元にどう拡張するかについても，かなり任意性があるが，ここでは，まず，任意の偶数次元 $n=2k$ の場合に拡張し，$2^{n/2}$ 成分の既約 $SO(1,n-1)$ スピノールと考え，その後に，抽象的に複素 n 次元のスピノールとみなすことにする。そうすれば，このスピノール上で定義された γ 行列は

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu} \tag{15}$$

を満たす抽象的代数量であり，そのトレースは

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)=g^{\mu\nu}\,\mathrm{tr}(1)=g^{\mu\nu}2^{n/2} \tag{16}$$

という約束となる。付録Bに，一般の偶数次元 $n=2k$ の場合に成立する γ 行列の多くの公式をまとめたが，それらは皆，$k=n/2$ を複素数と思えばこの次元正則化における公式とみなせる。ただ，ここでも，唯一問題なのは，偶数 $n=2k$ 次元の γ_5 行列(B.10)

$$\Gamma_5\equiv i^{k-1}\gamma^0\gamma^1\cdots\gamma^{n-1}=\frac{i^{k-1}(-)^{n-1}}{n!}\epsilon_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_n} \tag{17}$$

であり，完全反対称テンソル $\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}$ と同様，複素 n 次元に拡張するこ

とはできない。それで，我々の 4 次元の γ_5 は，上の 4 次元の $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ の場合と同じく，

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{-i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \tag{18}$$

で定義される決まった行列と考えておくことにする。こうすると，γ_5 は，$\gamma^0, \cdots, \gamma^3$ とは反可換であるが，それ以外の γ^μ とは可換，という面倒な性質を持つことになるが仕方がない。γ_5 や $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ を複素 n 次元に自然な形で拡張できないので，もしゲージ変換が γ_5 や $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ を含むものである場合には，次元正則化でもゲージ不変性を壊すことになる。このことが 9 章で述べるアノマリーの出現と関係しているのである。

7-2 1-loop 計算と乗法的くりこみ

この節では，紫外発散がどのように現れるかを具体的に見るために一つの簡単な模型をとって 1-loop 計算を行う。合わせて，現れた発散をどう処理するか，いわゆる乗法的くりこみ (multiplicative renormalization) の手続きについて説明する。

簡単な模型として，アイソスピン 1 のスカラー場 $\vec{\phi}=(\phi^1, \phi^2, \phi^3)^T$ とアイソスピン 1/2 の Dirac 場 $\psi=(\psi_1, \psi_2)^T$ とから成る湯川相互作用系

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{\phi}\cdot\partial^\mu\vec{\phi} - \mu^2\vec{\phi}^2) + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m - g\vec{\phi}\cdot\vec{\tau})\psi - \frac{\lambda}{8}(\vec{\phi}^2)^2 \tag{1}$$

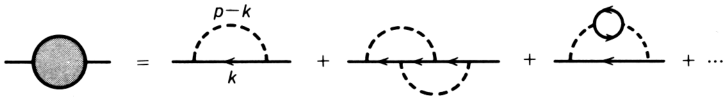
を考えることにする。Feynman グラフにおいて，ϕ の伝播関数は点線で，ψ の伝播関数は矢印つき実線で表すことにする。

フェルミオン自己エネルギー フェルミオンの 2 点 Green 関数 $S_F'(x) = \langle 0|\mathrm{T}\,\psi(x)\bar{\psi}(0)|0\rangle$ には，7·1 図に  で示した 1PI (1 粒子既約) なグラフ全体が，7·2 図のようにくり返した形で効く。しかし，その総和は，7·1 図の  を Σ と記せば簡単に求められて，運動量表示で

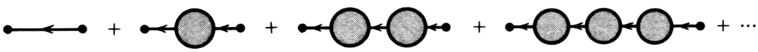
$$\begin{aligned} iS_F'(p) &= \frac{1}{m-\not{p}} + \frac{1}{m-\not{p}}\Sigma(p)\frac{1}{m-\not{p}} + \frac{1}{m-\not{p}}\Sigma(p)\frac{1}{m-\not{p}}\Sigma(p)\frac{1}{m-\not{p}} + \cdots \\ &= -[\not{p} - m + \Sigma(p)]^{-1} = -[\Gamma_\psi^{(2)}(p)]^{-1} \end{aligned} \tag{2}$$

となり，これはフェルミオンの 1PI 2 点頂点関数 $\Gamma_\psi^{(2)}(p)$ に他ならない†。

† 運動量表示の n 点頂点関数 $\tilde{\Gamma}^{(n)}(p)$ につけてきた ～ は以後省略する。



7·1 図



7·2 図

4 章で見たように，一般に n 点 Green 関数は，1PI な m 点頂点関数 $\Gamma^{(m)}(m\leqq n)$ で表されるから，すべての $\Gamma^{(n)}$ を有限にできれば $G^{(n)}$ は有限になる。それゆえ，今後くりこみの議論においては，もっぱら 1 粒子既約な頂点関数 $\Gamma^{(n)}$ のみを考察する。

2 点関数 $\Gamma^{(2)}$ の tree グラフ以外の寄与を一般に自己エネルギー (self energy) 部分と呼ぶ。フェルミオンの自己エネルギー部分 $\Sigma(p)$ に寄与するグラフは，今の場合，7·1 図で与えられるが，ここで，その最初のグラフに対応した最低次 (1-loop) の寄与 $\Sigma^{(1\text{-loop})}$ を評価しよう：

$$\Sigma^{(1\text{-loop})}(p)=\int\frac{d^4k}{i(2\pi)^4}(-g\tau_i)\frac{1}{m-\not{k}}(-g\tau_j)\frac{\delta_{ij}}{\mu^2-(p-k)^2}. \qquad (3)$$

この loop 積分は，被積分関数が k の -3 次で，積分 d^4k が 4 次であるから，明らかに $4-3=1$ 次の発散量となる。(実際には，すぐ後でわかる運動学的理由により 1 次下がった log 発散となる。) したがって，前節で述べた次元正則化を行い，付録 C (1) の Feynman パラメータ公式を用いて

$$\Sigma^{(1\text{-loop})}(p)=3g^2\int_0^1 dx\int\frac{d^nk}{i(2\pi)^n}\,\frac{m+\not{k}}{[(1-x)m^2+x(\mu^2-p^2)+2xp\cdot k-k^2]^2} \qquad (4)$$

とし，さらに，公式 (C.7), (C.8) を用いて d^nk 積分を遂行すれば

$$\Sigma^{(1\text{-loop})}(p)=3g^2\frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_0^1 dx\,\frac{m+x\not{p}}{[(1-x)m^2+x\mu^2-x(1-x)p^2]^{2-\frac{n}{2}}} \qquad (5)$$

を得る。ここで，**5-1** (8) ～ (11) の手続きを用いて，$n=4$ の pole 部分 $\bar{\varepsilon}^{-1}$

[5-1 (12)] を分離して，次式を得る：

$$\Sigma^{(1\text{-loop})}(p)=\left\{\frac{3g^2}{16\pi^2}\bar{\varepsilon}^{-1}\left(m+\frac{1}{2}\not{p}\right)+\Sigma^{(1\text{-loop})}_{\text{有限}}(p)\right\}+O(4-n),$$
$$\Sigma^{(1\text{-loop})}_{\text{有限}}(p)=-\frac{3g^2}{16\pi^2}\int_0^1 dx\,(m+x\not{p})\ln[(1-x)m^2+x\mu^2-x(1-x)p^2]. \tag{6}$$

もし次元正則化の代わりに Pauli-Villars 正則化を用いて，$\vec{\phi}$ の伝播関数を $\delta_{ij}[(\mu^2-k^2)^{-1}-(\Lambda^2-k^2)^{-1}]$ としていたとすれば，答は (6) の結果で $\mu^2=\Lambda^2$ とおいたものを引けばよい。その場合，μ^2 に依存しない pole 部分 $\bar{\varepsilon}^{-1}$ はなくなる代わりに，$\Sigma^{(1\text{-loop})}_{\text{有限}}(p)$ で $\mu^2=\Lambda^2$ としたものの逆符号項が付け加わる。すなわち，結果的に，(6) の pole 部分が次の項で置き換えられる：

$$\frac{3g^2}{16\pi^2}\bar{\varepsilon}^{-1}\left(m+\frac{1}{2}\not{p}\right)$$
$$\longrightarrow\ \frac{3g^2}{16\pi^2}\int dx\,(m+x\not{p})\ln[(1-x)m^2+x\Lambda^2-x(1-x)p^2]$$
$$=\frac{3g^2}{16\pi^2}\left[m(\ln\Lambda^2-1)+\frac{\not{p}}{2}\left(\ln\Lambda^2-\frac{1}{2}\right)\right]+O\left(\frac{p^2}{\Lambda^2},\ \frac{m^2}{\Lambda^2}\ln\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right)\right). \tag{7}$$

先にも注意したように，この結果 (7) には，Λ に比例する 1 次発散項が現れず，$\ln\Lambda^2$ に比例する log 発散項しかない。その理由は loop 積分の結果が必ず (次元 1 を持つ) m や $\not{p}$ に比例した形となるため次元が 1 次下がるからである。γ^μ に比例しない (単位行列 1 に比例した) 部分が因子 m を少なくとも一つ含むのは，$m=0$ の場合カイラル対称性がありそのような項が出ないためである。

一般に 1-loop でなくとも，フェルミオン自己エネルギー部分は

$$\Sigma(p)=\not{p}a(p^2)+mb(p^2)$$
$$=(\not{p}-m)a(p^2)+m\tilde{b}(p^2),\qquad \tilde{b}(p^2)\equiv b(p^2)+a(p^2) \tag{8}$$

の形をとる。$a(p^2)$, $\overset{(\sim)}{b}(p^2)$ は p^2 の関数であり，$p^2=m^2$ のまわりで Taylor 展開すれば，

$$\Sigma(p)=(\not{p}-m)a+m\tilde{b}+(p^2-m^2)[(\not{p}-m)\tilde{\tilde{a}}(p^2)+m\tilde{\tilde{b}}(p^2)]$$
$$a\equiv a(p^2=m^2),\qquad \tilde{b}\equiv\tilde{b}(p^2=m^2) \tag{9}$$

の形に書き換えることができる。上の $\Sigma^{(1\text{-loop})}$ の計算は，次元正則化による (6) であれ，Pauli-Villars 正則化による (7) であれ，(9) の展開の初項の

係数 $a, \tilde{b}$ に**のみ**発散

$$a^{(1)}=\frac{3g^2}{16\pi^2}\left[\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}^{-1}\ \text{または}\ \frac{1}{2}\ln\Lambda^2\right]+(\text{有限定数})$$
$$\tilde{b}^{(1)}=\frac{3g^2}{16\pi^2}\left[\frac{3}{2}\bar{\varepsilon}^{-1}\ \text{または}\ \frac{3}{2}\ln\Lambda^2\right]+(\text{有限定数}) \tag{10}$$

が現れ，残りの $\tilde{\tilde{a}}(p^2), \tilde{\tilde{b}}(p^2)$ は有限な p^2 の関数である，ということを示している。この点が特に重要である。この事実は，このオーダーでは当然で，そもそも，loop 積分を行う前の初めの式 (3) において，被積分関数を，次元1を持つ外線運動量 p^μ に関して Taylor 展開をすれば，p^μ の次数が上がるごとに1次ずつ k の loop 積分の収束性はよくなるからである。[$\Sigma(p)$ を (8) のように不変振幅 $a(p^2)$, $\overset{(\sim)}{b}(p^2)$ に分解した形で，p^2 の関数として Taylor 展開すれば，収束性は2次ずつよくなる。]

さて，問題は，$a, \tilde{b}$ に現れる (10) の“無限大”をどう処理するかである。(9) の定数 $a, \tilde{b}$ の物理的意味を見るために，(2) の表式に戻って考えよう。(9) を (2) に代入し，質量殻近傍 $\not{p}\simeq m$ で $S_F'(p)$ をみると

$$iS_F'(p)\simeq\frac{1}{(m-\not{p})(1+a)-m\tilde{b}}=\frac{(1+a)^{-1}}{m\left(1-\dfrac{\tilde{b}}{1+a}\right)-\not{p}} \tag{11}$$

となる。これは，相互作用の効果によって，($\tilde{b}\ll 1$ のとき) フェルミオンの質量が m から $m[1-\tilde{b}/(1+a)]$ にずれること，および，場 ψ の規格化因子 Z_2 が1から $(1+a)^{-1}$ に変化することを表している。今の摂動論においては，$a, \tilde{b}$ は“無限大”に計算されるのだが，たとえ発散のない理論の場合でも，**相互作用が存在すれば，質量 m や規格化因子 Z_2 をずらす効果を持つ**ということが重要な点である。後で計算するボソン場 $\vec{\phi}$ の場合も同様である。それゆえ，その効果をあらかじめ考慮して，出発点の“裸の”(bare) Lagrangian $\mathcal{L}_0$ の自由項部分は，(1) の $\mathcal{L}$ のそれとは異なった

$$\mathcal{L}_0^{\text{free}}=\bar{\psi}_0(i\gamma^\mu\partial_\mu-m_0)\psi_0+\frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{\phi}_0\cdot\partial^\mu\vec{\phi}_0-\mu_0^2\vec{\phi}_0^2) \tag{12}$$

であるとし，相互作用の効果を全部取り込んだ後の，正しく規格化された場を ψ, ϕ，正しい質量を m, μ，と呼んで，(12) に現れる量と

$$\psi_0=Z_2^{1/2}\psi, \qquad \vec{\phi}_0=Z_3^{1/2}\vec{\phi}, \tag{13}$$
$$m_0=m+\delta m, \qquad \mu_0^2=\mu^2+\delta\mu^2 \tag{14}$$

の関係でつながっているものと考える。そうすれば，(12) の $\mathcal{L}_0^{\text{free}}$ は

$$\mathcal{L}_0^{\text{free}}=\mathcal{L}^{\text{free}}+\mathcal{L}_{\text{count.}}^{\text{free}} \tag{15}$$

$$\mathcal{L}^{\text{free}}=\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi+\frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{\phi}\cdot\partial^\mu\vec{\phi}-\mu^2\vec{\phi}^2) \tag{16}$$

$$\mathcal{L}_{\text{count.}}^{\text{free}}=(Z_2-1)\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi-Z_2\delta m\bar{\psi}\psi \\ +\frac{1}{2}(Z_3-1)(\partial_\mu\vec{\phi}\cdot\partial^\mu\vec{\phi}-\mu^2\vec{\phi}^2)-\frac{1}{2}Z_3\delta\mu^2\vec{\phi}^2 \tag{17}$$

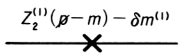
のように，二つの部分 $\mathcal{L}^{\text{free}}$, $\mathcal{L}_{\text{count.}}^{\text{free}}$ に分けられる。前者 $\mathcal{L}^{\text{free}}$ が (1) で与えた摂動の第 0 次の $\mathcal{L}$ の自由場部分であったと考えるのである。(12) で 0 の添字の付いた $\psi_0, \vec{\phi}_0$ を裸の場，m_0, μ_0 を裸の質量，対応する ψ, ϕ をくりこまれた場，m, μ をくりこまれた質量 (あるいは観測される物理的質量) と呼ぶ。$\mathcal{L}_{\text{count.}}^{\text{free}}$ の各項は相殺項 (counter terms) と呼ばれる。その理由は次のようにわかる：一般に $Z_{2,3}$ や $Z_2\delta m, Z_3\delta\mu^2$ は

$$\begin{aligned} Z_{2,3}&\equiv 1+\hbar Z_{2,3}^{(1)}+\hbar^2 Z_{2,3}^{(2)}+\cdots, \\ Z_2\delta m&\equiv 0+\hbar\delta m^{(1)}+\hbar^2\delta m^{(2)}+\cdots, \\ Z_3\delta\mu^2&\equiv 0+\hbar\delta\mu^{2(1)}+\hbar^2\delta\mu^{2(2)}+\cdots, \end{aligned} \tag{18}$$

と $\hbar$ のべきで展開され†，したがって，(17) の $\mathcal{L}_{\text{count.}}^{\text{free}}$ が存在すれば，フェルミオンの自己エネルギー $\Sigma(p)$ に対して，$\hbar$ の 1 次で (3) で評価した $\Sigma^{(\text{1-loop})}$ 以外に

$$\Sigma_{\text{count.}}^{(1)}(p)=Z_2^{(1)}(\not{p}-m)-\delta m^{(1)} \tag{19}$$

の寄与があることになる。すなわち，$\mathcal{L}_{\text{count.}}^{\text{free}}$ の $\hbar$ の 1 次の項 $Z_2^{(1)}\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi$ と $-\delta m^{(1)}\bar{\psi}\psi$ を "相互作用項" として用いた 7·3 図のグラフの寄与である。この寄与 (19) を加えれば，(9) で定義した定数 $a, \tilde{b}$ は，1-loop$(O(\hbar^1))$ までの近似で，それぞれ



7·3 図

$$a=a^{(1)}+Z_2^{(1)}, \qquad m\tilde{b}=m\tilde{b}^{(1)}-\delta m^{(1)} \tag{20}$$

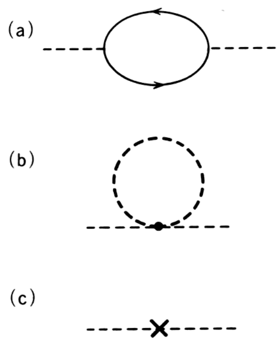
となる。ただし $a^{(1)}, \tilde{b}^{(1)}$ は上で計算した $\Sigma^{(\text{1-loop})}$ からの寄与 (10) である。ところが，我々は，ψ が正しく規格化された場，m が物理的質量になるようにあらかじめ (13), (14) の (波動関数および質量の) くりこみをやったのであるから，a および $\tilde{b}$ は 0 でなければならない：実際 $a=\tilde{b}=0$ であれば，(11) より ψ の 2 点関数は $\not{p}=m$ 近傍で $iS_F'(p)\simeq 1/(m-\not{p})$ となり，$\not{p}=m$ で pole を持ち，留数は正しく 1 となっている。したがって，$Z_2^{(1)}, \delta m^{(1)}$ は

† $\hbar=1$ の単位をとっているが，ここではあらわに書いた。

$$Z_2^{(1)} = -a^{(1)}, \qquad \delta m^{(1)} = m\tilde{b}^{(1)} \tag{21}$$

ととるべきであることがわかる。すなわち，この操作で，$\Sigma(p)$ の 1-loop の計算に現れた (10) の発散 $a^{(1)}$, $\tilde{b}^{(1)}$ は，$\mathcal{L}_{\text{count.}}^{\text{free}}$ の $Z_2^{(1)}$, $\delta m^{(1)}$ の寄与で相殺された (観測にかからない量 Z_2 や δm にくりこんだ) のである。そして $\Sigma^{(1\text{-loop})}(p)$ の残りの部分は有限で，意味のある量子補正を与えることになる。

ボソン自己エネルギー　ボソン $\vec{\phi}$ の自己エネルギー $\Pi(p^2)$,



7·4 図

$$\begin{aligned} i\Delta_F'^{ij}(p^2) &= -\delta^{ij}[p^2 - \mu^2 + \Pi(p^2)]^{-1} \\ &= -[\Gamma_\phi^{(2)ij}(p^2)]^{-1}, \end{aligned} \tag{22}$$

に効く 1PI グラフは 1-loop ($O(\hbar^1)$) レベルで，7·4 図の (a), (b) および (17) の相殺項 $\mathcal{L}_{\text{count.}}^{\text{free}}$ からの寄与 (c)，がある。したがって，このオーダーで

$$\begin{aligned} &\Pi^{(1)}(p^2) = \Pi^{(1\text{-loop})}(p^2) + \Pi_{\text{count.}}^{(1)}(p^2) \\ &\delta^{ij}\Pi^{(1\text{-loop})}(p^2) \\ &= \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n}(-)\text{tr}\left[(-g\tau^i)\frac{1}{m-\not{k}}(-g\tau^j)\frac{1}{m-(\not{k}-\not{p})}\right] \quad \text{(a)} \\ &\quad + \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n}\left(-\frac{\lambda}{8}\right)(4\cdot 3+8)\delta^{ij}\frac{1}{\mu^2-k^2} \quad \text{(b)} \\ &\Pi_{\text{count.}}^{(1)}(p^2) = [Z_3^{(1)}(p^2-\mu^2) - \delta\mu^{2(1)}] \quad \text{(c)} \end{aligned} \tag{23}$$

上のフェルミオンの場合と同様に，付録 C の Feynman パラメータ公式，次元正則化積分公式を用いて計算すれば

$$\begin{aligned} \Pi^{(1\text{-loop})}(p^2) = \frac{-2\cdot 4\cdot g^2}{16\pi^2}&\left\{(3\bar{\varepsilon}^{-1}+1)\left(m^2 - \frac{1}{6}p^2\right)\right. \\ &\left. -3\int_0^1 dx[m^2 - x(1-x)p^2]\ln[m^2 - x(1-x)p^2]\right\} \\ &+ \frac{1}{16\pi^2}\cdot\left(\frac{-5\lambda}{2}\right)\mu^2(-\bar{\varepsilon}^{-1} - 1 + \ln\mu^2) \end{aligned} \tag{24}$$

を得る。ここでも，次元正則化の代わりに Pauli-Villars-Gupta の正則化を用いればどうなるかをみておこう。この場合，7·4 図の (a) は，その寄与を $g(m^2)$ と呼び，1 回引き算をして $g(m^2) - g(\Lambda^2)$ としたものはまだ有限に

はならない。そこで，さらに引き算をして $[g(m^2)-g(\Lambda^2)]-[g(\Lambda^2+m^2)-g(2\Lambda^2)]$ としてやる。同様に 7·4 図 (b) の寄与 $f(\mu^2)$ に対しても $[f(\mu^2)-f(\Lambda^2)]-[f(\Lambda^2+\mu^2)-f(2\Lambda^2)]$ とする。(24) の答でこの操作を行えば，$\Lambda^2\to\infty$ で消える項を除いて

$$\Pi_{\rm PVG}^{(1\text{-loop})}(p^2)=-\frac{3g^2}{2\pi^2}\Big\{-(2\ln 2)\Lambda^2+m^2(\ln\Lambda^2+1)-\frac{1}{6}p^2(\ln\Lambda^2+1-\ln 2)$$
$$-\int_0^1 dx[m^2-x(1-x)p^2]\ln[m^2-x(1-x)p^2]\Big\}$$
$$-\frac{5\lambda}{32\pi^2}[(2\ln 2)\Lambda^2-\mu^2(\ln\Lambda^2+1-\ln\mu^2)] \tag{25}$$

を得る。この形では明らかに，Λ^2 に比例する 2 次発散の項と，$(m^2,\mu^2,p^2)\times\ln\Lambda^2$ に比例する対数発散の項があることがわかる。この場合も，これは，(23) の被積分関数が k の -2 次で積分が 4 次 d^4k であること，および，p^2 (や m^2,μ^2) の次元 2 を持った量で展開すると 2 次ずつ発散の次数が下がることから理解できる。すなわち，(24), (25) のどちらでも，$\Pi^{(1\text{-loop})}(p^2)$ は外線運動量 p^2 の関数として p^2 の 0 次と 1 次の項しか発散を含まず，したがって，ちょうど (23) の相殺項 $\Pi_{\rm count.}^{(1)}=Z_3^{(1)}(p^2-\mu^2)-\delta\mu^{2(1)}$ で相殺できる形をしている。特に，

$$\delta\mu^{2(1)}=\Pi^{(1\text{-loop})}(p^2=\mu^2)$$
$$=\Lambda^2\left(\frac{3g^2}{\pi^2}-\frac{5\lambda}{16\pi^2}\right)\ln 2$$
$$-\left[\frac{3g^2}{2\pi^2}\left(m^2-\frac{\mu^2}{6}\right)-\frac{5\lambda}{32\pi^2}\mu^2\right]\{\bar\varepsilon^{-1}\ \text{または}\ \ln\Lambda^2\}+(\text{有限定数}) \tag{26}$$

$$Z_3^{(1)}=-\left[\frac{\partial\Pi^{(1\text{-loop})}(p^2)}{\partial p^2}\right]_{p^2=\mu^2}$$
$$=-\frac{g^2}{4\pi^2}\{\bar\varepsilon^{-1}\ \text{または}\ \ln\Lambda^2\}+(\text{有限定数}) \tag{27}$$

ととれば，$\Pi^{(1\text{-loop})}(p^2)+\Pi_{\rm count.}^{(1)}(p^2)$ は有限で $(p^2-\mu^2)$ の 2 次以上の項しかなくなり，(22) の伝播関数 $i\Delta_F'^{ij}(p^2)$ は $p^2\simeq\mu^2$ 近傍で

$$i\Delta_F'^{ij}(p^2)\simeq\frac{\delta^{ij}}{\mu^2-p^2} \tag{28}$$

の形を保つから，ϕ は正しく規格化された場，μ は物理的質量，という上の要請を満たすことになる。

3 点頂点関数　次にフェルミオンとボソンの 3 点頂点関数 $\Gamma_{\bar\psi\psi\phi}^{(3)}$ を計算しよう。1-loop までの近似では

$$\Gamma^{(3)}_{\bar\psi\psi\phi_i}(p_2, p_1) = -g\tau^i + \Gamma^{(1\text{-loop})}_{\bar\psi\psi\phi_i}(p_2, p_1) + O(\hbar^2). \tag{29}$$

第 1 項は tree レベルの寄与で，第 2 項は 7・5 図のグラフの寄与である：

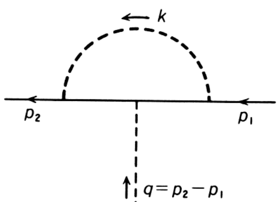
$$\Gamma^{(1\text{-loop})}_{\bar\psi\psi\phi_i}(p_2, p_1) = \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n}(-g\tau^j)\frac{1}{m-(\not p_2 - \not k)}(-g\tau^i)\frac{1}{m-(\not p_1 - \not k)}(-g\tau^j)\frac{1}{\mu^2 - k^2}. \tag{30}$$

これも，再び付録 C の (2) のパラメータ公式，(7)～(9) の積分公式を用いて容易に計算できて次式を得る：

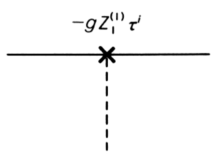
$$\Gamma^{(1\text{-loop})}_{\bar\psi\psi\phi_i}(p_2, p_1) = -g\tau^i\left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right)\Bigg[-\bar\varepsilon^{-1} + \frac{1}{2} + 2\int_0^1 dx\int_0^1 ydy \ln D(x, y) + \int_0^1 dx \int_0^1 ydy\, \frac{(m+\not p_1 - y\bar{\not p})(m+\not p_2 - y\bar{\not p})}{D(x, y)}\Bigg] \tag{31}$$

$$\begin{aligned} &\bar p \equiv xp_2 + (1-x)p_1, \qquad q \equiv p_2 - p_1, \\ &D(x, y) \equiv (1-y)\mu^2 + y[m^2 - q^2 x(1-x)] - y(1-y)\bar p^2. \end{aligned} \tag{32}$$

今回は，(30) の被積分関数が k の -4 次だから対数発散で，外線運動量 p_1 ででも p_2 ででも微分すれば収束するから，発散項は p_1, p_2 に依存しない定数項にのみ現れている。



7・5 図



7・6 図

一般に，3 点項点関数の量子補正項 $\Gamma^{(\text{補正})}_{\bar\psi\psi\phi}(p_1, p_2)$ を，関与する 3 粒子の質量殻 $\not p_1 = \not p_2 = m$，$q^2 = (p_2 - p_1)^2 = \mu^2$ のまわりで展開したとき

$$\Gamma^{(\text{補正})}_{\bar\psi\psi\phi_i}(p_1, p_2) = \tau^i[c + O(\not p_1 - m, \not p_2 - m, q^2 - \mu^2)], \tag{33}$$

の形となる。初項の定数項 c が 0 でない値をとったとすると，(29) は $\Gamma_{\bar\psi\psi\phi_i} \simeq -(g-c)\tau^i$ となるから，物理的な質量殻上のフェルミオンとボソンの湯川結合定数の値が，量子補正で g から $g-c$ に変化することを意味する。物理的に観測される湯川結合定数は，g ではなく，$g-c$ なのである。湯川結合定数 g に限らず，ϕ^4 頂点の結合定数 λ でも，一般に**結合定数は，**上述

の質量や場の規格化と同様，**相互作用の影響でずれる**。そこで，上の自己エネルギーの場合と同じ精神で，もともとの裸の Lagrangian $\mathcal{L}_0$ の相互作用項 $\mathcal{L}_0^{\text{int}}$ は，裸の場 $\psi_0, \vec{\phi}_0$ とある裸の結合定数 g_0, λ_0 を用いて

$$\mathcal{L}_0^{\text{int}} = -g_0\bar{\psi}_0\vec{\tau}\psi_0\cdot\vec{\phi}_0 - \frac{\lambda_0}{8}(\vec{\phi}_0^2)^2 \tag{34}$$

で与えられていたと考える。そして物理的粒子の間の観測される結合定数（くりこまれた結合定数と呼ぶ）を g, λ とし，裸の量 g_0, λ_0 を

$$g_0 = Z_1(Z_2Z_3^{1/2})^{-1}g, \qquad \lambda_0 = Z_4(Z_3^2)^{-1}\lambda \tag{35}$$

と書いて，(34) の裸の $\mathcal{L}_0^{\text{int}}$ を，(13),(35) を代入してくりこまれた量で書き直し，次のように二つの部分にわける：

$$\mathcal{L}_0^{\text{int}} = \mathcal{L}^{\text{int}} + \mathcal{L}_{\text{count.}}^{\text{int}} \tag{36}$$

$$\mathcal{L}^{\text{int}} = -g\bar{\psi}\vec{\tau}\psi\cdot\vec{\phi} - \frac{\lambda}{8}(\vec{\phi}^2)^2 \tag{37}$$

$$\mathcal{L}_{\text{count.}}^{\text{int}} = -g(Z_1-1)\bar{\psi}\vec{\tau}\psi\cdot\vec{\phi} - \frac{\lambda}{8}(Z_4-1)(\vec{\phi}^2)^2 \tag{38}$$

前者 $\mathcal{L}^{\text{int}}$ が初めに (1) で与えた摂動の第 0 次の Lagrangian $\mathcal{L}$ の相互作用部分であり，後者 $\mathcal{L}_{\text{count.}}^{\text{int}}$ は，$\bar{\psi}\psi\phi$ や ϕ^4 頂点関数の発散に対する相殺項を与えるわけである。Z_1 および Z_4 は，$\hbar$ のべきに展開され

$$Z_{1,4} = 1 + \hbar Z_{1,4}^{(1)} + \hbar^2 Z_{1,4}^{(2)} + \cdots, \tag{39}$$

摂動（loop 展開）の各次数で，$\bar{\psi}\psi\phi$ や ϕ^4 の頂点関数の "結合定数 g, λ への補正部分" がいつも 0 になるように決める。それは，tree レベルの値 g, λ を，あらかじめ最終的な観測値 g, λ になるものとしてとったからである。

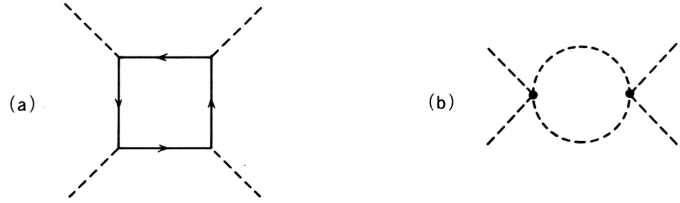
したがって，今の湯川頂点関数 $\Gamma_{\bar{\psi}\psi\phi_i}$ の場合は，$O(\hbar^1)$ で (30) の $\Gamma_{\bar{\psi}\psi\phi_i}^{(1\text{-loop})}$ に加えて (38) の $\mathcal{L}_{\text{count.}}^{\text{int}}$ の相殺項 $-gZ_1^{(1)}\bar{\psi}\vec{\tau}\psi\cdot\vec{\phi}$ を用いたグラフ 7·6 図の寄与 $-g\tau^iZ_1^{(1)}$ があり，質量殻 $\not{p}_1 = \not{p}_2 = m$，$q^2 = \mu^2$ 上の湯川結合定数 g が補正を受けないという要請で

$$\begin{aligned} Z_1^{(1)} &= -\left[\Gamma_{\bar{\psi}\psi\phi_i}^{(1\text{-loop})}(p_2, p_1)\Big/(-g\tau^i)\right]_{\not{p}_1=\not{p}_2=m,\, q^2=\mu^2} \\ &= \frac{g^2}{16\pi^2}\bar{\varepsilon}^{-1} + (\text{有限定数}) \end{aligned} \tag{40}$$

と決まることになる†。

4 点頂点関数　ボソンの 4 点頂点関数 $\Gamma_{\phi_i\phi_j\phi_k\phi_l}^{(4)}$ に寄与する 1-loop グラフは 7·7 図の (a),(b) の 2 種がある。もはや，具体的に計算をやらないが，

† (40) で行列 τ^i で割るというのは，$\Gamma_{\bar{\psi}\psi\phi_i}^{(1\text{-loop})}$ 中の因子 τ^i を外すという意味である。



7·7 図

これらのグラフが対数発散をすること，したがって，外線運動量で展開したときその初項の定数項にのみ発散が現れることは，明らかであろう。[実際，7·7 図 (a) は loop 積分 d^4k の被積分関数がフェルミオン伝播関数四つであるから k の -4 次，7·7 図 (b) はボソン伝播関数二つで同じく k の -4 次で振舞う。] それゆえ，この場合も (38) の $\mathcal{L}^{\text{int}}_{\text{count.}}$ 中の相殺項 $-(\lambda/8)Z_4^{(1)}(\vec{\phi}^2)^2$ の寄与 $-\lambda Z_4^{(1)}(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{kj})$ でもって発散を相殺でき，"質量殻上" の結合定数 λ が補正を受けないよう $Z_4^{(1)}$ を調整できる。ここで "質量殻上" といったが (スカラー) 4 点関数 $\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ は 4 粒子とも質量殻 $p_i^2=\mu^2$ 上においてもまだ $s=(p_1+p_2)^2$, $t=(p_1+p_3)^2$, $u=(p_1+p_4)^2$ のうち ($s+t+u=4\mu^2$ なので) 二つの変数が決まらないことに注意しておく。"質量殻上" としてしばしば使われるのは，(物理的領域†外であるが) 形式上便利な $s=t=u=4\mu^2/3$ の点で，対称点 (symmetric point) と呼ばれる：

$$\text{対称点：}\quad p_i\cdot p_j=\mu^2\delta_{ij}-\frac{1}{3}\mu^2(1-\delta_{ij}) \qquad (i,j=1,2,3,4) \quad (41)$$

もう一つ注意しておくべき点は，裸の Lagrangian $\mathcal{L}_0$ の中に $\lambda_0\phi_0^4$ の相互作用項が入っていなければ (すなわち湯川相互作用項のみでは) 発散のくりこみができなかった，ということである。実際，$\lambda_0\phi_0^4$ 相互作用項がなければ，相殺項 $-(\lambda/8)(Z_4-1)(\vec{\phi}^2)^2$ が存在せず，しかるに 7·7 図 (a) のグラフは依然として存在して発散を出すからである。

乗法的くりこみ　1-loop のレベルで紫外発散を含むグラフが以上ですべてであることは，loop 内の伝播関数の k の次数を考えてみれば明らかで

† 実際の粒子の散乱で実現できる s, t, u の変数領域を物理的領域という。

あろう。それゆえ，我々は，少なくとも 1-loop の範囲内で，紫外発散をすべて，場の規格化因子 $Z_{2,3}$ (波動関数くりこみ因子ともいう)，質量のシフト $\delta m, \delta\mu^2$ および結合定数 g, λ のくりこみ因子 $Z_{1,4}$，に吸収できることを示したわけである。

このくりこみ操作で行ったことをもう一度整理して言い直してみよう。記号の簡単のためスカラー場1種類の純粋 $\lambda\phi^4$ 理論の場合の言葉でいうことにする。まず我々はもとの裸の Lagrangian $\mathcal{L}_0(\phi_0;\ \mu_0^2, \lambda_0)$ を，(13)～(17), (35)～(38) でやったように，裸の場 ϕ_0，裸の質量 μ_0，裸の結合定数 λ_0 の代わりに

$$\phi_0 = Z_3^{1/2}\phi, \qquad \mu_0^2 = \mu^2 + \delta\mu^2, \qquad \lambda_0 = Z_4 Z_3^{-2}\lambda \equiv Z_\lambda \lambda \tag{42}$$

の形で関係付けられたくりこんだ量 ϕ, μ, λ で書き直した：

$$\mathcal{L}_0(\phi_0;\ \mu_0^2, \lambda_0) = \mathcal{L}(\phi;\ \mu^2, \lambda) + \mathcal{L}_{\text{count.}}(\phi;\ \mu^2, \lambda;\ Z_3, Z_\lambda, \delta\mu^2). \tag{43}$$

そして，右辺の $\mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{count.}}$ で計算した ϕ のすべての n 点頂点関数 $\Gamma^{(n)}$，したがってその生成汎関数――有効作用 $\Gamma[\phi;\ \mu^2, \lambda]$，は紫外発散のない well-defined な量となった。ところが，右辺の $\mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{count.}}$ 自体は，全体として，左辺の裸の Lagrangian $\mathcal{L}_0$ と同じものだという点が重要である。それゆえ，直接 $\mathcal{L}_0$ に基づいて ϕ_0 の有効作用 Γ_0 を計算しても，Γ と同じ量が結果するはずである：

$$\Gamma_0[\phi_0;\ \mu_0^2, \lambda_0;\ \Lambda] = \Gamma[\phi;\ \mu^2, \lambda] \tag{44}$$

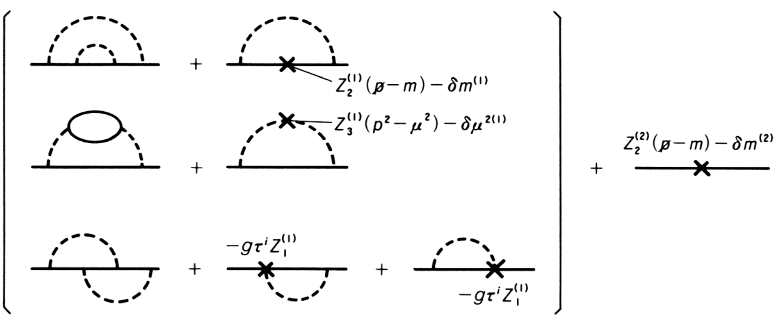
左辺に，切断パラメータ Λ (または次元 n) を入れたのは，裸の作用 Γ_0 は裸の量 $\phi_0, \mu_0^2, \lambda_0$ の (汎) 関数としては発散しており，正則化しておかないと well-defined でないからである。それゆえ，(44) の等号は，より正確にいえば $\Lambda \to \infty$ (または $n \to 4$) の極限で消えるような項の違いを除いて等しいという意味である。(42), (44) のいうところは，Λ が十分大きい (または $n-4 \ll 1$) とき，有効作用 Γ_0 の $\Lambda((n-4)^{-1})$ 依存性はすべて $Z_3^{1/2}, \delta\mu^2, Z_\lambda$ に押し込められて，Γ_0 と**同じ量**の $\Gamma[\phi;\ \mu^2, \lambda]$ が ϕ, μ^2, λ の有限な (汎) 関数となる，ということである。すなわち，くりこまれた有効作用 Γ は，Λ (または n) によらないくりこまれた量 ϕ, μ^2, λ の，Λ によらない (汎) 関数となるのである。これに対し，$Z_3^{1/2}, \delta\mu^2, Z_\lambda$ が Λ によっているので，(42) で定義される裸の量 $\phi_0, \mu_0^2, \lambda_0$ は Λ による。[逆にいえば，$\Lambda \gg 1$ ($n-4 \ll 1$) のところで Λ (または n) を動かしたとき，裸の量 $\phi_0(\Lambda), \mu_0^2(\Lambda), \lambda_0(\Lambda)$ をうまく Λ につれて変化させれば，(44) 右辺の $\Gamma[\phi;\ \mu^2, \lambda]$ が Λ に依存しない有限量となるということである。] (44) は，左右両辺を $\phi_0 = Z_3^{1/2}\phi$ のべき

で展開すると，裸の n 点頂点関数 $\Gamma_0^{(n)}$ とくりこまれたもの $\Gamma^{(n)}$ の間の関係式

$$Z_3^{n/2}\Gamma_0^{(n)}(\boldsymbol{p}, \mu_0^2, \lambda_0; \Lambda) = \Gamma^{(n)}(\boldsymbol{p}, \mu^2, \lambda) \qquad \boldsymbol{p} \equiv (p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}) \quad (45)$$

を意味する。このことから，ここで述べたくりこみ法は乗法的くりこみ (multiplicative renormalization) と名付けられている。

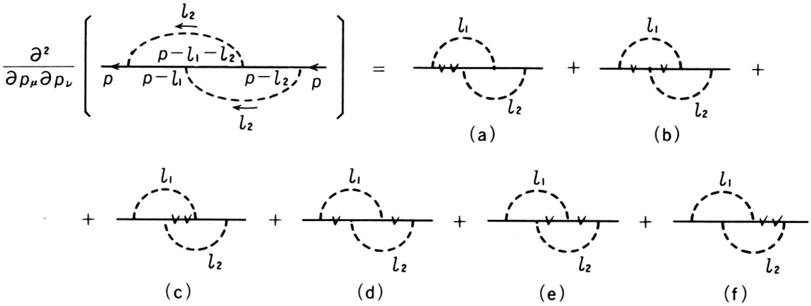
もちろん，この節ではこの乗法的くりこみがうまくいくことを摂動の $O(\hbar^1)$ でしか示していない。より高次の項を議論するときは，低次の摂動で決まった相殺項も "相互作用項" として含めたグラフをすべて考える必要があることに注意する。例えば，先の湯川相互作用系 (1) の例で，$O(\hbar^2)$ のフェルミオン自己エネルギーに効くグラフには 7・8 図に示した 8 個がある。$O(\hbar^1)$ の相殺項を含むグラフは，ちょうど，7・8 図の括弧内の第 1 列に描いたグラフがそれぞれ含む 1-loop 内部グラフ (subdiagram) の発散を相殺する形で現れていることに注意しよう。実際に，すべての内部グラフの発散をきっちり相殺しておかないと，「一番外側のループの最終的積分を行ったときに現れる発散 (overall divergence) が外線運動量に関して高々多項式である。すなわち $\Gamma_\psi^{(2)}$ の場合は $\not p$ の 1 次まで，$\Gamma_{\bar\psi\psi\phi}$ の場合は 0 次まで，等々」という重要な性質が成り立たない。この性質が成り立って初めて $\mathcal{L}_{\rm count.}$ で用意した相殺項で発散が消せるのであって，くりこみ可能性の一般証明の核心をなす点である。



7・8 図 $O(\hbar^2)$ で $\Gamma_\psi^{(2)}$ に効く全グラフ

この一般証明はかなり面倒でここでは与えない。(次節で，その定理のみを述べる。) しかし，なぜ内部グラフの発散を消去しておかないと最終的な答で発散が外線運動量の多項式にとどまらなくなるのかを，一つの例で説

明しておこう。7·8図の中の一つの2-loopグラフ7·9図をとってみよう。グラフの各伝播関数の運動量を7·9図左辺に示したようにとることにして，外線運動量 p で例えば2回微分 $\partial^2/\partial p_\mu \partial p_\nu$ してみる。すると被積分関数中の三つのフェルミオン伝播関数のどれが微分を受けるかで，微分の位置を∨で示して，右辺の六つの場合がある。微分を1回受けるごとに伝播関数の分母の運動量の次数が一つずつ上がることに注意すれば，次数の勘定から，右辺の(b),(c),(d),(e)のグラフは確かに l_1, l_2 のloop積分がともに収束していることがわかる。しかし，(a)のグラフは，l_1 積分の収束性は十分よくなっているが，l_2 積分の方は全然改善されずにlog発散のままである。(f)のグラフは逆に l_1 積分がlog発散のままである。この事情は何回微分しても同じで，発散する内部グラフが入っていると，外線運動量で外側からいくら微分しても発散が改善されずに残る項が必ず存在するのである。これが内部グラフの発散を消去しておかなければならない理由である。



7·9 図

最後に次の点に注意しておきたい。この節のくりこみ手続きでは，くりこみの物理的側面を強調するため，「頂点関数 $\Gamma^{(n)}$ の**質量殻上**の値が量子補正を受けない」という観点を強調した。すなわち，単純な $\lambda\phi^4$ 理論の例でいうと，$\Gamma^{(2)}, \Gamma^{(4)}$ の“質量殻上”の値が，摂動の任意の次数で，treeレベルでの値にとどまれという条件

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{(2)}(p^2=\mu^2;\ \mu^2,\lambda)=0,\\
&\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma^{(2)}(p^2;\ \mu^2,\lambda)\big|_{p^2=\mu^2}=1, \qquad (46)\\
&\Gamma^{(4)}(\boldsymbol{p};\ \mu^2,\lambda)\big|_{p_i\cdot p_j=\mu^2\delta_{ij}-\frac{1}{3}\mu^2(1-\delta_{ij})}=-\lambda,
\end{aligned}$$

をおいたことに相当する。このような条件は一般にくりこみ条件と呼ばれる。特に(46)のような質量殻上のくりこみ条件を設定して行うくりこみを質量殻上くりこみ(on-shell renormalization)という。しかし，質量殻上でくりこむか，例えば $p_i^\mu=0$ の点でくりこむかというのは，発散の処理という意味ではどちらでもよい。重要な点は，摂動の任意次数で(内部グラフの発散を消去してある限り) $\Gamma^{(n)}$ の発散が外線運動量 p_i に関して有限次数の部分にのみ現れるところにあり，その p_i に関する Taylor 展開を $p_i^2=\mu^2$ のところでやるか $p_i=0$ のところでやるかは問題ではなく，どうやっても p_i の同じ次数のところまでしか発散はないのである。それゆえ，例えば(46)の代わりに

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^{(2)}(p^2=0;\ \mu^2,\lambda)=-\mu^2\\
&\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma^{(2)}(p^2;\ \mu^2,\lambda)\Big|_{p^2=0}=1 \qquad (47)\\
&\Gamma^{(4)}(\boldsymbol{p}=0;\ \mu^2,\lambda)=-\lambda
\end{aligned}
$$

のように $p_i=0$ でくりこみ条件を設定してくりこみを行うこともできる。これは $p=0$ での中間的くりこみ(intermediate renormalization)と呼ばれる。形式的なくりこみ可能性の議論などでは，(47)の条件で行うのが便利である。ただもちろん，(47)の場合は，μ^2 や λ はもはや物理的質量でも“質量殻上”の結合定数でもないし，場 ϕ も質量殻上で1に規格化されていない。この場合は，計算された $\Gamma^{(2)}$ の零点から物理的質量 $\mu^2_{\rm phys}$ を求め，その点での p^2 の係数 $[\partial\Gamma^{(2)}/\partial p^2](p^2=\mu^2_{\rm phys})=z^{-1}$ を読み取って，$z^2\Gamma^{(4)}$ の物理的質量殻上の値から物理的結合定数 $\lambda_{\rm phys}$ を求める。そして逆に(47)のパラメータ μ^2,λ をそれらの $\mu^2_{\rm phys},\lambda_{\rm phys}$ で表すことができるから，$z^{n/2}\Gamma^{(n)}$ も $\mu^2_{\rm phys},\lambda_{\rm phys}$ を使って書き直せ，それらは質量殻上くりこみで求めた n 点頂点関数に一致する。この $p=0$ での中間的くりこみの $\Gamma^{(n)}$ から，質量殻上くりこみの $\Gamma^{(n)}$ に書き直す手続きは，発散を含まないが，(45)に与えたくりこみと本質的には同じ手続きであり，有限くりこみ(finite renormalization)と呼ばれる。

7-3 BPHZくりこみ

ここで，一般的な理論で非常に組織的なくりこみ手続きを与える Bogoliubov(ボゴリウボフ)-Parasiuk(パラジウク)-Hepp(ヘップ)-

Zimmermann のいわゆる BPHZ くりこみについて述べよう。この BPHZ くりこみ処法は，くりこみ可能な理論に対しては前節で述べた乗法的くりこみと同等であることがわかるが，その適用は必ずしもくりこみ可能理論に限定されないし，さらに，その系統性ゆえに，後に議論する複合演算子 (composite operator) のくりこみや演算子積展開 (operator product expansion) の証明などに強力な方法を与えることになる。

見かけ上の発散次数 種々なボソン場とフェルミオン場から成る一般の系を考える。その Lagrangian は次の形をとる：

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}^{\text{free}}+\sum_i \mathcal{L}_i^{\text{int}} \qquad (1)$$

ここに $\mathcal{L}^{\text{free}}$ は，それらの場の自由項で，それから決まる Feynman 伝播関数 $\Delta_F(k)$ は，k が大きいとき，k^{-2} で振舞うものと k^{-1} で振舞うものがあるとする†。ここでは統計性は重要でないので，便宜上統計性と無関係に，前者の振舞いをする場をボソン場，後者をフェルミオン場と呼ぶことにする††。$\mathcal{L}_i^{\text{int}}$ は種々なタイプの相互作用項 (場の単項式) で，その項の中のボソン場の個数が b_i 個，フェルミオン場が f_i 個，それらの場にかかる微分の合計階数が d_i とする；すなわち標記的に，微分を ∂，ボソン場を ϕ，フェルミオン場を $\psi, \bar{\psi}$ と書いて，

$$\mathcal{L}_i^{\text{int}}=g_i(\partial)^{d_i}\cdot(\phi)^{b_i}\cdot(\psi \text{ または } \bar{\psi})^{f_i} \qquad (2)$$

の形をしているとする。このとき，この相互作用項 $\mathcal{L}_i$ に対応する Feynman グラフの頂点――$\mathcal{L}_i$ 頂点と呼ぶ――に対して†††

$$\delta_i \equiv b_i+\frac{3}{2}f_i+d_i-4 \equiv \dim(\mathcal{L}_i^{\text{int}})-4 \qquad (3)$$

なる整数 δ_i を付与し，これを $\mathcal{L}_i$ 頂点の指標 (index) と呼ぶ。

前節の 1-loop グラフの計算でも出てきたように，ある Feynman グラフの loop 積分が紫外発散を含むかどうかは，伝播関数および頂点因子の積で与えられる被積分関数の，運動量に関する次数と，loop 積分の次数の和を

---

† したがって，ベクトル場の場合，例えば R_ξ ゲージの伝播関数

$$[g_{\mu\nu}-(1-\alpha)k_\mu k_\nu/(k^2-\alpha M^2)]/(k^2-M^2) \longrightarrow k^{-2}\,(k\gg 1)$$

ならよい。しかし，ユニタリー・ゲージの場合は

$$[g_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu/M^2]/(k^2-M^2) \longrightarrow O(k^0)$$

であるから，以下の議論から除外される。

†† それゆえ，例えばゲージ理論の FP ゴースト場は，フェルミオンであるが，ここではボソン場と呼んでいる。

††† (3) は時空 4 次元の場合の指標で，一般の整数 n 次元理論の場合は，$\delta_i\equiv\dim(\mathcal{L}_i)-n=b_i(n-2)/2+f_i(n-1)/2+d_i-n$ と定義する。

計算して判定される。あるグラフ Γ が，$\mathcal{L}_i$ 頂点を n_i 個，ボソン内線を I_{B} 個，フェルミオン内線を I_{F} 個含み，E_{B} 個のボソン外線，E_{F} 個のフェルミオン外線につながってていたとする。そのとき，運動量がすべて大きくなる場合の運動量の次数を勘定する; 各 $\mathcal{L}_i$ 頂点は微分を d_i 階含むから d_i だけ効き，各ボソン内線は上の仮定より -2，フェルミオン内線は -1，だけ寄与する。運動量表示の古い方の Feynman 則 **4-3** (37) に従えば，各内線伝播関数ごとに運動量積分 d^4k があり，頂点ごとに運動量保存の δ 関数 $\delta^4(\sum k_i)$ があるから，実質的運動量次数として，各内線ごとに $+4$，頂点ごとに -4 の寄与が加わることになる。ただし，頂点に対応する δ 関数全体の中に全外線運動量の保存則に相当する δ 関数が 1 個含まれているので，その 1 個は内線運動量積分を減らすのに使えないから -4 の寄与を与えない。したがって，このグラフ Γ は

$$\omega(\Gamma)=\sum_i n_i d_i+(4-2)I_{\mathrm{B}}+(4-1)I_{\mathrm{F}}-4\Big[\Big(\sum_i n_i\Big)-1\Big] \tag{4}$$

の実質的運動量次数を持つ。この $\omega(\Gamma)$ を Γ のみかけ上の発散次数 (superficial degree of divergence) と呼ぶ。この次数の表式をもっと簡単化するために，次の関係式に注意しよう。各 $\mathcal{L}_i$ 頂点には b_i 個のボソン線の端点が付いており，一方各ボソン内線は頂点に付く二つの端点を，各ボソン外線は一つの端点を，持つから，端点数の 2 通りの数え方により

$$\sum_i n_i b_i=2I_{\mathrm{B}}+E_{\mathrm{B}} \tag{5}$$

の等式を得る。同様にフェルミオンの端点数から

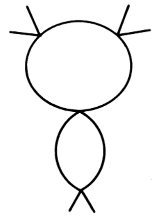
$$\sum_i n_i f_i=2I_{\mathrm{F}}+E_{\mathrm{F}}. \tag{6}$$

(5), (6) の関係式を用いて，(4) の $I_{\mathrm{B}}, I_{\mathrm{F}}$ を消去して

$$\begin{aligned}\omega(\Gamma)&=\sum_i n_i\Big(d_i+b_i+\frac{3}{2}f_i-4\Big)-E_{\mathrm{B}}-\frac{3}{2}E_{\mathrm{F}}+4\\&=4-E_{\mathrm{B}}-\frac{3}{2}E_{\mathrm{F}}+\sum_i n_i\delta_i\end{aligned} \tag{7}$$

を得る。δ_i は上の (3) で定義した $\mathcal{L}_i$ 頂点の指標である。

前節で見たように，1PI 頂点関数の 1-loop グラフの場合は，この (4) で定義した見かけ上の発散次数 $\omega(\Gamma)$ は確かに本当の発散次数であった。$\omega(\Gamma)=2$ なら 2 次発散，0 なら対数発散，負なら収束であった。しかし loop の数が二つ以上あるときは，それぞれ個々の loop 積分に，そのグラフの中のすべての伝播関数や頂点が関わっているわけではないから，$\omega(\Gamma)$



7·10 図

<0 は必ずしも，そのグラフ Γ が発散を含まぬことを保証しない。例えば $\lambda\phi^4$ 理論で，7·10 図に示したグラフは ($E_B=6$, $\delta=0$ だから) $\omega(\Gamma)=-2$ であるが，明らかに下側の loop 積分は対数発散をしている。このことから，Γ のグラフ全体ばかりでなく，その任意の部分グラフ γ に対しても見かけ上の発散次数 $\omega(\gamma)$ を計算し，それらがすべて $\omega(\gamma)<0$ であれば Γ は発散を含まないのではないかと予想される。実際この予想は正しく，次数勘定定理 (power-counting theorem) と呼ばれる次の定理が一般的に証明される。

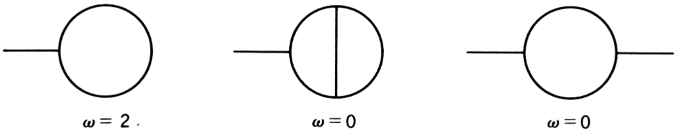
[次数勘定定理]　ある Feynman グラフ Γ の Feynman 積分は，もし，Γ 自身も含めて Γ の任意の 1PI 部分グラフ γ に対して，その見かけ上の発散次数 $\omega(\gamma)$ がすべて負であるならば，(伝播関数中の $-i\epsilon$ 処法の $\epsilon>0$ を固定したとき) 絶対収束する。

ここで 1PI 部分グラフと呼んでいるのは，Γ の部分グラフの中で 1 粒子既約であり，かつその外線はもいだものである。これ以後，単に **1 PI グラフ**といえば，1 粒子既約というだけでなく外線をもいだものを意味することにする。この定理の証明は，一般のグラフの振幅に対する Feynman パラメータ表示に基づいてなされる，かなり技術的に込み入ったものである。
ここではそれに立ち入る余裕はないので，単に認めることにしよう。

逆に，見かけ上の発散 $\omega(\Gamma)$ が正または 0 であれば，一般に，対称性などの特殊事情がない限り，Γ の Feynman 積分は発散する。それゆえ，(7) の $\omega(\Gamma)$ に対する公式から，理論のタイプを次のように分類できることがわかる：

i)　指標が $\delta_i<0$ (すなわち $\dim(\mathcal{L}_i^{\rm int})<4$) の相互作用項 $\mathcal{L}_i^{\rm int}$ しかない理論：　この場合は，(7) の最後の項 $\sum_i n_i\delta_i$ が負に効くから，相互作用頂点の数 n_i が少ないグラフしか発散しない。例えば，スカラー ϕ^3 理論は，ϕ^3 頂点の指標は $\delta=-1$ であり，外線のない ($E_B=0$) 真空グラフを別とすれば，(7) の $\omega(\Gamma)$ が $\geqq 0$ となるのは，7·11 図に描いた，$E_B=1$ で頂点数が $n=1$ または 3 の tadpole グラフ，$E_B=2$ で $n=2$ の自己エネルギーグラフ，の合計三つのグラフしかない。すなわち，摂動の全

次数で考えても，発散が起こるのは，低次の特定の**有限個**のグラフのみである。このタイプの理論を超くりこみ可能 (super renormalizable) という。



7·11 図 ϕ^3 理論で発散するグラフのすべて

ii） 指標が $\delta_i \leqq 0$ $(\dim(\mathcal{L}_i^{\mathrm{int}}) \leqq 4)$ の相互作用項 $\mathcal{L}_i^{\mathrm{int}}$ のみを含む（かつ，$\delta_i=0$ の $\mathcal{L}_i^{\mathrm{int}}$ が少なくとも一つはある）理論： この場合は，$\delta_i=0$ の $\mathcal{L}_i$ 頂点は何回含まれていても $\omega(\Gamma)$ は変わらないから，発散するグラフは摂動のいくら高次でも存在し無限個あることになる。しかし，(7) の $\omega(\Gamma)$ の式より，$\omega(\Gamma) \geqq 0$ で発散するグラフ Γ は

$$E_{\mathrm{B}}+\frac{3}{2}E_{\mathrm{F}}=(\text{外線場の次元}) \leqq 4 \tag{8}$$

の場合のみである。例えば $\lambda\phi^4$ 理論の場合は，真空グラフを別として，$E_{\mathrm{B}}=2$ の自己エネルギー型グラフと，$E_{\mathrm{B}}=4$ の 4 点頂点型グラフの 2 種のみである。($E_{\mathrm{B}}=1$ や 3 のグラフは $\lambda\phi^4$ 理論では $\phi \to -\phi$ に対する不変性のため存在しない。相互作用項が ϕ^4 と ϕ^3 の両方ある理論ではそれらも発散グラフとして現れる。） すなわち，dim $(\mathcal{L}_i^{\mathrm{int}}) \leqq 4$ のみの相互作用項から成るこのタイプの理論では，出てくる発散も外線場の次元が 4 以下の**有限種類**のグラフのみである。実際に以下でわかるように，このタイプの理論は，次元が 4 以下の相殺項ですべての発散が除去でき，くりこみ可能 (renormalizable) 理論と呼ばれる。



7·12 図 $\lambda\phi^4$ 理論で発散するグラフ

iii） $\delta_i>0$ $(\dim(\mathcal{L}_i^{\mathrm{int}})>4)$ の相互作用項 $\mathcal{L}_i$ を含む理論： この場合，$\delta_i>0$ の $\mathcal{L}_i$ 頂点を多く含めば含むほど (7) の $\omega(\Gamma)$ は大きくなる。すな

わち，摂動の次数を上げるにつれて，より多くの外線を持つグラフが発散するようになり，結局**無限種類**の発散グラフが現れることになる。これは無限個の（種類の）相殺項，あるいは同じことだが無限個の結合定数の指定，が必要なことを意味する。このタイプの理論はくりこみ不可能(non-renormalizable)な理論と呼ばれる†。このタイプの理論は，($\delta_i>0$ の）相互作用項 $\mathcal{L}_i$ の結合定数 g_i が負の質量次元 $[M]^{-\delta_i}$ を持つことで特徴付けられ，重力相互作用がその最も重要な例である。

BPHZ のくりこみ手続き　一般に，ある Feynman グラフ Γ の振幅 F_Γ は，Feynman 則により Γ に対応して構成された伝播関数と頂点因子の積 I_Γ を loop 運動量 k_l について積分した形で与えられる：

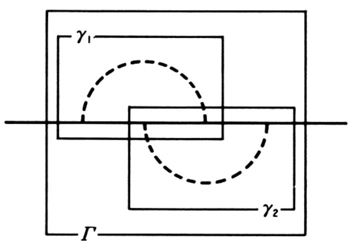
$$F_\Gamma=\int d^4k_1\cdots d^4k_m\, I_\Gamma. \qquad (9)$$

BPHZ のくりこみ手続きの特徴的な点は，**グラフの1個1個**に対し，その被積分関数 I_Γ にある引き算操作を行い，一般に発散を含む (9) の表式を有限なもの F'_Γ に帰着させるところにある：

$$F'_\Gamma=\int d^4k_1\cdots d^4k_m\, R_\Gamma. \qquad (10)$$

この I_Γ から R_Γ を得る操作を R 演算(R-operation) と呼ぶが，これを与える前にいくつか言葉を定義する：

a) くりこみ部分 (renormalization part) γ とは，1PI グラフ γ で，その見かけ上の発散次数 $\omega(\gamma)$ が $\geqq 0$ のものをいう。例えば，前節の湯川相互作用系の 2-loop グラフの一つをとれば，そのくりこみ部分は，7・13 図に示した Γ（全体），γ_1, γ_2 の三つである。



7・13 図

b) 二つのグラフ γ_1 と γ_2 は，共通の線または頂点を一つも持たないとき，互いに素 (disjoint) と言い，$\gamma_1\cap\gamma_2=\emptyset$（空集合）と記す。$\gamma_1$ に属する線がすべて γ_2 にも属するとき，γ_1 は γ_2 の部分グラフである，または，γ_1 は

† これは，摂動論の枠内で，無限個の結合定数をどう指定すればよいかについて物理的論拠のある方法がわからないという意味である。非摂動論的方法で，この無限個の結合定数の指定が有限個に帰着させられて“くりこみ可能”になるという可能性が排除されているわけではない。また，超対称性のようなより高い対称性があって，発散がそもそも相殺して存在しないという理論もあってよい。

γ_2 に含まれているといい $\gamma_1\subset\gamma_2$ と記す。また，$\gamma_2\cap\gamma_2=\emptyset$ か $\gamma_1\subset\gamma_2$ か $\gamma_1\supset\gamma_2$ のどれかが成り立つとき，γ_1 と γ_2 は重複していないといい，そうでないとき，重複している (overlapping) と呼ぶ。7·13 図のくりこみ部分 γ_1 と γ_2 とは重複しているグラフの例になっている。

c) $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_c$ を，あるグラフ Γ の中の，どの二つも互いに素なくりこみ部分としたとき，Γ の中で $\gamma_1,\cdots,\gamma_c$ をそれぞれ 1 点につぶして得られる縮約グラフを $\Gamma/\{\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_c\}$ と記す。このとき，Feynman 積分 (9) の被積分関数 I_Γ は

$$I_\Gamma=I_{\Gamma/\{\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_c\}}\prod_{\tau=1}^{c}I_{\gamma_\tau} \tag{11}$$

の形を持ち，I_{γ_τ} は，I_Γ と同様，Feynman 則によりグラフ γ_τ に対応して構成された被積分関数である。

d) くりこみ部分 γ の外線運動量を $p_1,\cdots,p_n$ とすれば，運動量保存より，そのうち $n-1$ 個が独立であるから

$$I_\gamma=f(p_1,p_2,\cdots,p_{n-1})\equiv f(\boldsymbol{p}) \tag{12}$$

と書ける。I_γ は内部 loop 運動量 k_i にも依存するが，それら k_i は固定しておいて $\boldsymbol{p}\equiv(p_1,\cdots,p_{n-1})$ のみの関数と見るのである。そこで，グラフ γ に対する d 次の Taylor 演算子 t_d^γ を，$f(\boldsymbol{p})$ の $\boldsymbol{p}=0$ まわりの Taylor 展開の $\boldsymbol{p}$ の d 次項までを取り出す演算として定義する：

$$t_d^\gamma f(\boldsymbol{p})\equiv f(\boldsymbol{0})+\sum_{i=1}^{n-1}p_i^\mu\frac{\partial f(\boldsymbol{p})}{\partial p_i^\mu}\bigg|_{\boldsymbol{p}=0}+\cdots+\frac{1}{d!}\sum p_{i_1}^{\mu_1}\cdots p_{i_d}^{\mu_d}\frac{\partial^d f(\boldsymbol{p})}{\partial p_{i_1}^{\mu_1}\cdots\partial p_{i_d}^{\mu_d}}\bigg|_{\boldsymbol{p}=0}. \tag{13}$$

特に，この演算の次数 d をくりこみ部分 γ の見かけ上の発散次数 $\omega(\gamma)$ に等しくとるときは，d を省略して書く：

$$t^\gamma\equiv t^\gamma_{d=\omega(\gamma)}. \tag{14}$$

e) グラフ Γ のくりこみ部分 γ_i の集合 $U=\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k\}$ で，U のどの 2 元 γ_i,γ_j も互いに重複していない（すなわち $\gamma_i\cap\gamma_j=\emptyset$ または $\gamma_i\supset\gamma_j$ または $\gamma_i\subset\gamma_j$）場合，U を森または Γ 森 (Γ-forest) と呼ぶ。このとき，森 U として空集合 $\{\emptyset\}$ も含める。また，グラフ Γ 自体もくりこみ部分の場合は，元 γ_i として Γ も含んでいてよいとする。例えば，先の 7·13 図のグラフの場合，その Γ 森 U として次の六つがある：

$$\{\emptyset\},\ \{\gamma_1\},\ \{\gamma_2\},\ \{\Gamma\},\ \{\Gamma,\gamma_1\},\ \{\Gamma,\gamma_2\} \tag{15}$$

さて準備が整ったので，約束の R 演算の定義を与えよう。[Bogoliubov 自身による R 演算は (9) の loop 積分を遂行した後の (もちろん正則化した) 量 F_Γ に対する演算として定義されていたのだが，次に与えるのは，Zimmermann によるその被積分関数 I_Γ に対する演算としての言い換えである。]

(9) の I_Γ から，(10) の“くりこまれた被積分関数” R_Γ を得る手続きは，次の回帰的 (recursive) 定義式で与えられる：

$$R_\Gamma=\begin{cases}(1-t^\Gamma)\bar{R}_\Gamma & \Gamma \text{ 自身がくりこみ部分 } (\omega(\Gamma)\geqq 0) \text{ のとき} \\ \bar{R}_\Gamma & \text{そうでないとき } (\omega(\Gamma)<0)\end{cases} \tag{16}$$

$$\bar{R}_\gamma=I_\gamma+\sum_{\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}} I_{\gamma/\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}}\prod_{\tau=1}^{c}(-t^{\gamma_\tau})\bar{R}_{\gamma_\tau}. \tag{17}$$

(17) で和は，グラフ γ の中の，互いに素なくりこみ部分 $\gamma_i(\neq\gamma, \neq\emptyset)$ の組 $\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_c\}$ のあらゆる可能なとり方についての和を表す。(17) の $\bar{R}_\gamma$ の定義は回帰的であるが，右辺に現れる $\bar{R}_{\gamma_\tau}$ のグラフ γ_τ は，必ず左辺に現れる $\bar{R}_\gamma$ のグラフ γ より loop 数が下がっており，γ が 1-loop グラフになれば，(17) 自身より $\bar{R}_\gamma=I_\gamma$ であるから，帰納的に定義が完結している。

例えば，先の例の 7･13 図のグラフに対して，(16),(17) の操作を施してみれば，この場合 γ_1 と γ_2 は互いに素でないから，(17) の和の組 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_c\}$ として $\{\gamma_1\}$ か $\{\gamma_2\}$ しかないから，

$$R_\Gamma(7\cdot 13\text{ 図})=(1-t^\Gamma)\{I_\Gamma+I_{\Gamma/\gamma_1}(-t^{\gamma_1})I_{\gamma_1}+I_{\Gamma/\gamma_2}(-t^{\gamma_2})I_{\gamma_2}\} \tag{18}$$

となる。(11) よりこの場合 $I_\Gamma=I_{\Gamma/\gamma_1}\cdot I_{\gamma_1}=I_{\Gamma/\gamma_2}\cdot I_{\gamma_2}$ であるから，これは

$$R_\Gamma(7\cdot 13\text{ 図})=(1-t^\Gamma)(1-t^{\gamma_1}-t^{\gamma_2})I_\Gamma \tag{19}$$

$$=(1-t^{\gamma_1}-t^{\gamma_2}-t^\Gamma+t^\Gamma t^{\gamma_1}+t^\Gamma t^{\gamma_2})I_\Gamma \tag{20}$$

とも書けることに注意しておこう。

ところが，(16),(17) をよく見れば，この R 演算の手続きは実質的に前節の最後に述べた，乗法的くりこみのうち $p=0$ での中間的くりこみの手続きと全く同一であることに気付く。例えば，7･13 図のグラフ Γ の場合の R_Γ の表式 (18) または (19) を見よう。まず，$\omega(\gamma_1)=\omega(\gamma_2)=0$ であるから，$t^{\gamma_i}(i=1, 2)$ は部分グラフ γ_i の I_{γ_i} (1-loop 湯川頂点関数の被積分関数) の外線運動量 0 での値 (定数部) を取り出す演算であり，したがって，(19) の第 1 段階の $(1-t^{\gamma_1}-t^{\gamma_2})\,I_\Gamma$ の 3 項は，ちょうど前節 7･8 図の括弧内第 3 行目の三つのグラフのそれぞれに対応している。実際，$p=0$ の中間的くりこみの場合の乗法くりこみでは，頂点相殺項 $-g(Z_1-1)\bar{\psi}\vec{\tau}\psi\cdot\vec{\phi}$ の係数 $Z_1^{(n)}$

は，各ループ次数で3点頂点関数の $p=0$ での量子補正を相殺するように決められたので，$p=0$ まわりの Taylor 演算の引き算項 $-t^{\gamma_1}I_\Gamma$，$-t^{\gamma_2}I_\Gamma$ が，ちょうど，それぞれ，γ_1 部，γ_2 部に頂点相殺項を用いたグラフと対応するのである。したがって $\bar{R}_\Gamma=(1-t^{\gamma_1}-t^{\gamma_2})I_\Gamma$ からは内部発散が除かれている。[この場合，I_Γ は被積分関数なのでもともと有限量だが，loop 積分をすれば発散するだろう量を発散と呼んでいる。] 同様に第2段の $R_\Gamma=(1-t^\Gamma)\bar{R}_\Gamma$ の演算は，$\omega(\Gamma)=1$ だから，$\bar{R}_\Gamma$ の p について1次までの項を引く演算で，相殺項 $Z_2^{(2)}\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi-\delta m^{(2)}\bar{\psi}\psi$ を用いたグラフの寄与 $Z_2^{(2)}p\!\!\!/-\delta m^{(2)}$ を加えることに相当している†。

この例からもわかるようにBPHZの $(-t^\gamma)$ 演算は，外線運動量 p の多項式を引いているのであるから，その項の一つ一つを，x 空間での**局所的演算子**の相殺項として理解し直すことができる。また，(17) の $\bar{R}_\Gamma$ を得る手続きは，グラフ Γ の内部の部分グラフの発散をすべて取り除くこと，そして (16) の最後の操作は，$\omega(\Gamma)\geqq 0$ のとき現れる最終的な発散 (overall divergence) を取り除くこと，としてそれぞれ解釈できる。Taylor 演算子 t^γ を簡単な $p=0$ まわりでの展開で定義したことが，このBPHZくりこみが，7-2 の (47) のような $p=0$ でのくりこみ条件を設定した中間的くりこみに相当する理由である。もっと複雑に，グラフごとに異なる "Taylor 演算子" t^γ を定義すれば，このBPHZくりこみが，直接，質量殻上くりこみに一致するようにすることもできる。

以上の乗法的くりこみとの同等性は，しかし，くりこみ可能理論の場合に限られることもまた明らかであろう。なぜなら，くりこみ不可能理論の場合は，摂動の高次へ行けば行くほど，次数 $\omega(\gamma)$ のどんどん大きなものが現れ，対応する $-t^\gamma$ 演算は，x 空間で微分や場の次数のより大きな相殺項を勝手に次々加えていくことを意味しているからである。そのような高次の相殺項は，乗法的くりこみではあらかじめ用意されていないのである。

さて，上で与えた R 演算の定義式 (16), (17) 自体は，このように，摂動論における乗法的くりこみとの対応が見やすい形をしているのであるが，その回帰的な表式は，この方法を複合演算子のくりこみ等の場合に応用する際，あまり便利なものでない。Zimmermann は，そこで，R_Γ を I_Γ から直

† もっと正確にいえば，乗法的くりこみの場合の $Z_2^{(2)}$ や $\delta m^{(2)}$ は，7・8図の括弧内の3通りのグラフ全体の寄与を相殺するのだが，BPHZ の $(1-t^\Gamma)\bar{R}_\Gamma$ 操作では，それらの相殺項定数への，Γ のグラフの寄与分のみを引いている。

接与える次の表式を見出した (Zimmermann の森公式)：

$$R_\Gamma=\sum_{U\in\mathscr{F}(\Gamma)}\left[\prod_{\gamma\in U}(-t^\gamma)\right]I_\Gamma. \tag{21}$$

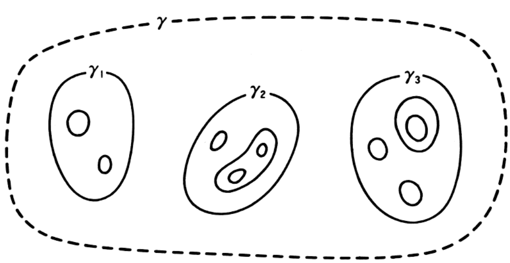
ここに，$\mathscr{F}(\Gamma)$ はあらゆる可能な Γ 森の全体で，γ は Γ 森 U に属するくりこみ部分である。そして，U のいくつかの元が $\gamma_1\subset\gamma_2\subset\cdots$ のように含まれる関係にあるときは，小さい方の γ から先に順に $(-t^\gamma)$ 演算をやるものとする。この (21) の表式は，実は，我々はすでに具体例の場合に知っている。それは 7·13 図のグラフの場合の (20) である。(20) の $(1-t^{\gamma_1}-\cdots+t^\Gamma t^{\gamma_2})$ の各項は，ちょうど，(15) に与えた六つの Γ 森 $\{\emptyset\},\{\gamma_1\},\cdots,\{\Gamma,\gamma_2\}$ のそれぞれに順に対応した $\prod_{\gamma\in U}(-t^\gamma)$ 演算である。

(21) の一般証明も難しくない。まず言葉として，Γ 森 U で Γ 自身を含むものを満杯 (full)，Γ を含まないものを正規 (normal) と呼ぶ。Γ がくりこみ部分であれば，満杯の Γ 森は，正規な Γ 森のそれぞれに Γ を元として加えて得られるから，正規な Γ 森と 1 対 1 対応である。

最初に，γ 森のうち正規なものの全体を $\bar{\mathscr{F}}(\gamma)$ と記し，

$$\bar{\bar{R}}_\gamma\equiv\sum_{U\in\bar{\mathscr{F}}(\gamma)}\left[\prod_{\lambda\in U}(-t^\lambda)\right]I_\gamma \tag{22}$$

で定義した量が，(17) の $\bar{R}_\gamma$ と一致することを示す。これには (22) の $\bar{\bar{R}}_\gamma$ が回帰的方程式 (17) を満たすことをいえばよい。正規な γ 森 U は，空な森 $\{\emptyset\}$ でない限り，7·14 図に示すように，必ずいくつかの最大元 $\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_c\}$ を持つ。それゆえ，(22) の正規な γ 森すべてにわたる和は，ある互いに素なくりこみ部分の組 $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}$ をその最大元の組として持つような γ 森全体をまず足し上げ，次に組 $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}$ のあらゆるとり方について加えるのと同じである。$\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}$ を最大元として持つ γ 森の全体にわた



7·14 図 三つの最大元 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ を持つ正規な γ 森

る和は，それぞれの γ_τ ($\tau=1,\cdots,c$) ごとに満杯の γ_τ 森 (γ_τ 自身を外せば正規の γ_τ 森) すべてを足し上げることに相当するから，次式を得る：

$$\sum_{U\in\bar{\mathcal{F}}(\gamma)}\prod_{\lambda\in U}(-t^{\lambda})=1+\sum_{\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}}\prod_{\tau=1}^{c}\left\{(-t^{\gamma_\tau})\left[\sum_{U_\tau\in\bar{\mathcal{F}}(\gamma_\tau)}\prod_{\lambda_\tau\in U_\tau}(-t^{\lambda_\tau})\right]\right\}. \tag{23}$$

第1項の1は空な γ 森 $\{\emptyset\}$ の場合から来る。この等式 (23) を，(11)

$$I_\gamma=I_{\gamma/\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}}\left[\prod_{\tau=1}^{c}I_{\gamma_\tau}\right] \tag{24}$$

に辺々演算すれば，(23) の右辺の [ ] で囲んだ部分が，ちょうど左辺の γ に対する演算と同じ形の γ_τ に対する演算になっている点に注意して，(22) の定義より

$$\tilde{\bar{R}}_\gamma=I_\gamma+\sum_{\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}}I_{\gamma/\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}}\prod_{\tau=1}^{c}(-t^{\gamma_\tau})\tilde{\bar{R}}_{\gamma_\tau} \tag{25}$$

を得る。これは $\bar{R}_\gamma$ に対する回帰的方程式 (17) と一致し，よって，$\bar{R}_\gamma=\tilde{\bar{R}}_\gamma$ が証明された。

次に，もし Γ がくりこみ部分でなければ，Γ 森は正規なものしかないから $\mathcal{F}(\Gamma)=\bar{\mathcal{F}}(\Gamma)$ であり，(22) の右辺は (21) の右辺と一致し，よって先の (16) より $R_\Gamma=\bar{R}_\Gamma=$(22) 右辺$=$(21) 右辺 であり，(21) が成り立つ。もし Γ がくりこみ部分なら，どの満杯の Γ 森も，正規の Γ 森に Γ を付け加えて得られるから，

$$\begin{aligned}R_\Gamma=(1-t^\Gamma)\bar{R}_\Gamma&=\sum_{U\in\bar{\mathcal{F}}(\Gamma)}(1-t^\Gamma)\prod_{\gamma\in U}(-t^{\gamma})I_\Gamma\\&=\sum_{U\in\mathcal{F}(\Gamma)}\prod_{\gamma\in U}(-t^{\gamma})I_\Gamma\end{aligned} \tag{26}$$

となり，この場合も (21) が成り立ち，証明が完了した。

くりこまれた Feynman 積分の収束定理 以上でかなり詳しく BPHZ くりこみの手続きを見てきたが，もちろん，最も重要なことは，この R 演算により得られたくりこまれた被積分関数 R_Γ の Feynman 積分 (10) が果たして収束しているかという点である。R 演算は上述のように，与えられたグラフ Γ のすべての内部の部分グラフの発散を順次 Taylor 展開で取り除いていく操作に相当しており，直観的には収束しているのは当然のようにも思える。しかし，これも，容易に想像されるように，実際に一般のグラフに対して証明しようとするとかなり大変で，事実，Bogoliubov と Parasiuk による初めの証明 (1957 年) が，Hepp によって完全な厳密証明として完成されるのはやっと 1966 年になってからであった。その後も多

くの人により，証明の改善・完全化が行われている。

ここでは，再び証明抜きで，この定理を与える：

[収束定理] 任意のグラフ Γ に対して，R_Γ の Feynman 積分 (10) は，$(-i\epsilon$ 処法の) $\epsilon>0$ を固定するとき，絶対収束する。

この定理は，先に分類したくりこみ可能理論，くりこみ不可能理論，を問わず成立する定理であることを強調しておこう。

もう一点 BPHZ くりこみに関して強調しておくべきことがある。それは BPHZ の R 演算が Feynman 被積分関数 I_Γ に対して直接行われている点である。R 演算後の R_Γ の積分は収束しており，それゆえ，BPHZ くりこみでは正則化は不要である。このため，しばしば BPHZ くりこみは "正則化に依存しない" (regularization-independent) といわれる。

対称性とくりこみ ここで，BPHZ くりこみとその収束定理とからただちに従う，いくつかの重要な命題を与えよう。

我々は今 (1) の形の $\mathcal{L}$ を持つ全く一般的なボソン (ϕ)・フェルミオン (ψ) 系を考えていることをまず思い起こしておこう。そして，上の収束定理は，そういう系での紫外発散が，任意のグラフ Γ において，そのくりこみ部分 γ の各々に対し，みかけ上の発散次数 $\omega(\gamma)$ 分だけの Taylor 項の引き算

$$(-t^{\gamma}_{d=\omega(\gamma)})\overline{R}_{\gamma} \tag{27}$$

を行えば除去されることを言っているのである。一方 $\omega(\gamma)$ が公式 (7) により，グラフ γ のボソン，フェルミオン外線数を $E^{\gamma}_{\mathrm{B}}, E^{\gamma}_{\mathrm{F}}$ としたとき

$$\omega(\gamma)=4-E^{\gamma}_{\mathrm{B}}-\frac{3}{2}E^{\gamma}_{\mathrm{F}}+\sum_i n_i\delta_i \tag{28}$$

(n_i はグラフ γ 中の $\mathcal{L}_i$ 頂点数) であったことを思い起こせば，(27) の Taylor 項の p の $\omega(\gamma)$ 次までの各項は，次の形の局所的相殺項

$$\mathcal{L}^{\gamma}_{\text{count.}}=(\text{定数})\,(\partial)^d\,(\phi)^{E_{\mathrm{B}}{}^{\gamma}}(\psi \text{ または } \overline{\psi})^{E_{\mathrm{F}}{}^{\gamma}}$$
$$d=0,1,2,\cdots,\omega(\gamma) \tag{29}$$

を挿入することに相当していることがわかる。この相殺相互作用項 (29) の次元，または (3) で定義された指標 δ，は (28) を用いると

$$\dim(\mathcal{L}^{\gamma}_{\text{count.}})=E^{\gamma}_{\mathrm{B}}+\frac{3}{2}E^{\gamma}_{\mathrm{F}}+d=4+\sum_i n_i\delta_i-(\omega(\gamma)-d), \tag{30}$$

$$\delta(\mathcal{L}^{\gamma}_{\text{count.}})=\sum_i n_i\delta_i-(\omega(\gamma)-d), \tag{31}$$

である。ところが，(29) より $\omega(\gamma)-d\geqq 0$ であるから，次の命題を得る：

[命題 1] あるくりこみ部分のグラフ γ の発散から要求される相殺項 $\mathcal{L}^{\gamma}_{\mathrm{count.}}$ は，その指標 δ が，γ 内の相互作用頂点の指標の総和以下のものに限られる。

先に，指標が $\delta_i \leqq 0$ である相互作用項 $\mathcal{L}_i$ のみから成る理論をくりこみ可能理論と名付けたが，くりこみが，前節の乗法的くりこみでやったように，場の規格化や質量・結合定数の書き換えと理解できるためにはもっと強い条件が必要である。すなわちすべての必要とされる相殺項を，裸の Lagrangian の場やパラメータの再規格化によって出してくるためには，もとの Lagrangian がそれらの相殺項と同じ形の相互作用項をあらかじめ持っている必要がある。[湯川相互作用系における ϕ^4 項はその例であった。] この強い条件を満たす理論の方がむしろ通常くりこみ可能といわれるものなので，ここでもそれに従う。そうすれば，上の命題 1 から次の命題は自明であろう。

[命題 2] (1) のところで定義した意味のボソン・フェルミオンが与えられたとき，そのすべての場とその微分で構成される，次元が 1, 2, 3, 4 の (すなわち，指数が $\delta \leqq 0$ の) 可能な単項式をすべて含む (裸の) Lagrangian を持つ系は，くりこみ可能である。

しかし，実際の系では，Lorentz 不変性は別にしても，種々な内部対称性を持っている。例えば，最も単純な $\lambda\phi^4$ 理論でも，$\phi \to -\phi$ の対称性があり，ϕ の奇数次の頂点関数 $\Gamma^{(2k+1)}$ は摂動の任意次数で 0 であり，したがって裸の Lagrangian も ϕ の偶数べきの項だけ用意しておけばくりこみ可能である。前節の湯川相互作用系はさらにアイソスピン $SU(2)$ 対称性を持ち，$SU(2)$ 不変な項のみから成る Lagrangian でくりこみ可能であった。これらの内部対称性はどれも BPHZ 手続きのどの段階でも明白に保たれている対称性なので，その対称性を破る Taylor 引き算項は現れず，相殺項は対称なもののみで充分なのである。したがって

[命題 3] BPHZ 手続きで明白に保たれる線形内部対称性を持つ系の場合は，命題 2 の Lagrangian をその対称性を満たす項のみに制限しても，くりこみ可能である。

Lorentz 不変性や，$SU(n)$ カイラル対称性，荷電共役・パリティ不変性，等々は皆このような明白な対称性の例である。しかし，対称性が場に関して非線形な変換の場合は，もはやここでいう“明白な”対称性ではない。[線形な対称性でも自発的に破れた真空の上で摂動計算を行う場合は，場の変

換が非線形になり，“明白な”対称性でなくなる。] しかし，非線形の“明白でない”対称性でも，多くの場合，Lagrangian をその対称性を満たすものに限ってもくりこみ可能である。ただ，それは非自明で個々の場合に証明を要する。後で議論するゲージ理論のくりこみの問題も，基本的な BRS 対称性が非線形であり，この範ちゅうの問題の一つなのである。

ある対称性を破る項が，次元 3 以下† の場合ソフト (soft) な破れ項と呼ばれる。次の定理は，対称性を破るソフトな項を系に付け加えた場合への命題 3 の拡張として，Symanzik が初めて与えたものである：

[定理] 命題 3 の系に，その対称性を破る次元が $d(\leqq 3)$ のソフトな項を加えたとき，d 以下の次元の対称性を破る項のすべてを Lagrangian に含めれば，くりこみ可能である。

(証明) Lagrangian の対称な項は皆指標 $\delta \leqq 0$ を持つ。破る項は d 以下の次元であるから指標は $\delta \leqq d-4$ である。対称性を破る相殺項は，対称性を破る項を少なくとも一つの頂点に含むグラフ γ の発散から要求される。そのようなグラフ γ 内の相互作用頂点の指標の総和は $d-4$ 以下であり，したがって，命題 1 から，要求される相殺項の指標は $d-4$ 以下，すなわち，次元が d 以下である。(証明終)

この定理は，例えば，理論の赤外発散を正則化する技巧としてボソンの質量項を手で加えるなどというとき，たとえ，それが系の対称性を破る場合でも，次元 3 以上の相互作用項は対称なものから変更する必要がないことを保証しており，有用なものである。もっとも，この定理で言っているのは無限大の相殺項に関する話であって，有限部分に関してはもちろん次元 d を越える項にも対称性を破る効果が現れることに注意しておかねばならない。

7-4　ゲージ理論の乗法的くりこみ

前節の BPHZ くりこみの一般論により，特に命題 2 により，Lagrangian として，次元が 4 以下のあらゆる相互作用項を用意しておけば，系は一般にくりこみ可能であることがわかった。だから，そのボソン場としてベクトル場が入ってきても，その伝播関数が，運動量 k の大きいとき k^{-2} で振

† n 次元時空の場合は，次元が $n-1$ 以下の破れの項をソフトと呼ぶ。

舞うタイプのものであれば，くりこみ可能性に関して特に問題があるわけではない。しかしながら，ベクトル場を含む場合そのような一般的な系は物理的に意味がない。というのは，5章で述べたように，ベクトル場は負計量のモードを含んでいて，それが物理的な確率解釈を壊すからである。そのような負計量モードが物理的空間には有限確率で出てこないというふうにうまく制御できるためには，系はゲージ不変性，あるいは量子系でもっと正確に言えばBRS不変性，を持たねばならないのである。このゲージ不変性のために，系のLagrangianは次元が4以下のすべての項を勝手には持ち得ない。例えば，ゲージ場の質量項$(1/2)m^2A^a_\mu A^{a\mu}$は存在しないし，$(A)^3$項の係数g(結合定数)と$(A)^4$項の係数g^2とは独立ではない；すなわち，相殺項として用意できる項はかなり制限されているのである。このような制限された相殺項だけで，現れる発散のすべてを実際に除去できるのか？という問題がゲージ理論における(乗法的)くりこみ可能性の問題なのである。この点は，対称性を持つ系では常に存在する問題であるが，前節の命題3のところで述べたように，ゲージ系の場合，BRS対称性が非線形であるため自明でないのである。これに対する肯定的解答を与えるのが本節の目的である。

Ward-高橋恒等式　ここでは，5章で設定した一般的なゲージ理論の系を考える：Lagrangian $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\mathrm{GI}}+\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}$は，物質場を$\varphi_i$と記し

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GI}}=-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}+\mathcal{L}_{\mathrm{matter}}(\varphi,D_\mu\varphi) \tag{1}$$

$$F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+gf_{abc}A^b_\mu A^c_\nu, \tag{2}$$

$$D_\mu\varphi_i=\partial_\mu\varphi_i-igA^a_\mu T^a_{ij}\varphi_j. \tag{3}$$

ゲージ固定＋Faddeev-Popov項$\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}$は，一般的に線形なゲージ固定関数

$$F^a(A,\varphi,B)\equiv\partial^\mu A^a_\mu+f^a_i\varphi_i+\frac{1}{2}\alpha B^a+w^a\qquad(f^a_i,w^a：\text{定数}) \tag{4}$$

をとることにすれば†，次式で与えられる：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}=B^a(\partial^\mu A^a_\mu+f^a_i\varphi_i+w^a)+\frac{\alpha}{2}B^aB^a+i\bar{c}^a(\partial^\mu D_\mu c^a+igf^a_iT^a_{ij}\varphi_jc^a). \tag{5}$$

---

† (4)のゲージ固定関数は，6-5で述べたR_ξゲージ型のゲージに相当する。もちろん，物質場φ_iの中にフェルミオン場があれば，その部分の係数f^a_iは0としておく。定数項w^aは後で必要になることがわかる。

便宜のため，今後ゲージ場と物質場をひっくるめていう場合は，$\phi_I\equiv(A_\mu^a, \varphi_i)$ という記号を用い，その BRS 変換や (4), (5) を次のように記す：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}A_\mu^a&=D_\mu c^a\\ \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\varphi_i&=igc^aT_{ij}^a\varphi_j\end{aligned}\right\}\quad \text{まとめて}\quad \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\phi_I=D_I^a c^a \tag{6}$$

$$\partial^\mu A_\mu^a+f_i^a\varphi_i\equiv f_I^a\phi_I,\qquad f_I^a\equiv(\delta_b^a\partial_\mu, f_i^a), \tag{7}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}=B^a(f_I^a\phi_I+w^a)+\frac{\alpha}{2}B^aB^a+i\bar{c}^af_I^aD_I^bc^b. \tag{8}$$

5-6 でやったように，場 $(A_\mu^a, \varphi_i, c^a)=(\phi_I, c^a)$ の BRS 変換 $(D_I^ac^a, -(g/2)(c\times c)^a)$ の外場 (K) 項を加えた作用積分

$$S[\Phi, K]=\int d^4x\left[\mathcal{L}_{\mathrm{GI}}+\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}+K_ID_I^ac^a-\frac{g}{2}K_c^a(c\times c)^a\right], \tag{9}$$

$$\Phi\equiv(\phi_I, c^a, \bar{c}^a, B^a),\qquad K_ID_I^ac^a\equiv K_\mu^aD^\mu c^a+K_iigc^aT_{ij}^a\varphi_j, \tag{10}$$

を持つ系を考え，その系の有効作用 $\Gamma[\phi_I, c^a, \bar{c}^a, B^a, K_I, K_c^a]\equiv\Gamma[\Phi, K]$ に対する Ward-高橋 (WT) 恒等式を導けば，**5-6** の (11) を得る：すなわち

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{\mathrm{I}}}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_I}+\frac{\delta\Gamma}{\delta c^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_c^a}+i\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a}B^a=0. \tag{11}$$

ここでも，以下でも，**5-6** と同様，この式にかかる $\int d^4x$ 積分記号を省略していることに注意しておく。さらに，NL 場 B^a と反ゴースト場 $\bar{c}^a$ の運動方程式から従う **5-6** (12), (13) は，今の一般的線形ゲージ (8) の場合，それぞれ

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta B^a}=f_I^a\phi_I+w^a+\alpha B^a \tag{12}$$

$$f_I^a\frac{\delta\Gamma}{\delta K_I}+i\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a}=0, \tag{13}$$

と読み換えられる。

くりこみ可能性の主張　(9) の作用 S や (11)～(13) の有効作用 Γ は，本当は皆，裸の場 $\Phi_0\equiv(\phi_{0I}, c_0^a, \bar{c}_0^a, B_0^a)$，裸の外場 $K_0\equiv(K_{0I}, K_{0c}^a)$，裸の“結合定数” g_0, f_{0I}^a, α_0 でもともと書かれている量で，したがって (11)～(13) の恒等式に現れる $\Gamma, \Phi, K, f, \alpha$ は皆裸の量を表す添字 0 を付けるべきものである。[ゲージ結合定数 g 以外にも，物質場間の湯川結合定数や $\lambda\phi^4$ 結合定数，それに物質場の質量についても，もし存在すれば，同様に考慮する。]　しかし，裸の量は本来発散量であるから，裸の量を用いた議論が意

味を持つためには，何らかの正則化を行っておかねばならず，しかも裸の量に対して(11)の WT 恒等式を導けるためには，この正則化はゲージ不変性を尊重するものでなければならない。ゲージ不変な正則化が存在するかどうかは理論によるが，この節で考察する理論には**ゲージ不変な正則化の方法が存在する**ことを仮定する。これは重要な仮定である。話を明確にするため，ここでは，次元正則化を採用しておくことにする。[7-1 で述べたように，カイラル・フェルミオンのある場合，すなわち γ_5 行列の現れる場合は，次元正則化もゲージ不変性を壊す。しかし，そのような場合は実際ゲージ不変な正則化が存在せず，9章に述べるように，一般にアノマリーが現れてくりこみ可能性が壊されることになる。]

この節で証明したい我々の最終的主張は，裸の量で書かれた有効作用 Γ_0 が，次に定義するくりこまれた諸量で書き直せば，有限な汎関数 Γ (くりこまれた有効作用) となる，ということである：すなわち

$$\Gamma_0[\Phi_0, K_0;\ g_0, f_0, \alpha_0]=\Gamma[\Phi, K;\ g, f, \alpha]. \tag{14}$$

ここで，くりこまれた場 $\Phi\equiv(\phi_I, c^a, \bar{c}^a, B^a)$ は，裸の場 Φ_0 と，それぞれ

$$\begin{aligned} A^a_{0\mu}&=Z_3^{1/2}A^a_\mu, \\ \varphi_{0i}&=Z_i^{1/2}(\varphi_i+v_i), \\ (c_0^a,\ \bar{c}_0^a)&=\tilde{Z}_3^{1/2}(c^a,\ \bar{c}^a) \end{aligned} \tag{15}$$

の関係でつながるとする。物質場部分の定数 v_i は，一般的線形ゲージ(4)が $f_i^a\varphi_i$ 項を含むことに起因する(対称性の自発的破れのない場合でも必要な)場 φ_i の定数シフトである。NL 場 B^a や外場 K のくりこみは(11)～(13)の恒等式が**くりこまれた量で書いても同じ形になる**ように行う。まず，(12)の裸の式

$$\frac{\delta\Gamma_0}{\delta B_0^a}=\partial^\mu A^a_{0\mu}+f^a_{0i}\varphi_{0i}+w^a+\alpha_0 B_0^a \tag{16}$$

に，$\Gamma_0=\Gamma$, $A^a_{0\mu}=Z_3^{1/2}A^a_\mu$, $\varphi_{0i}=Z_i^{1/2}(\varphi_i+v_i)$ を代入し，くりこんだ量で書いて同じ形に(しかし，定数項 w^a がなくなる形に)なるように

$$\begin{aligned} B_0^a&=Z_3^{-1/2}B^a, \qquad f^a_{0i}=Z_3^{1/2}Z_i^{-1/2}f_i^a, \\ \alpha_0&=Z_3\alpha, \qquad w^a=-Z_3^{1/2}f_i^a v_i, \end{aligned} \tag{17}$$

とする。[B^a やゲージ・パラメータ α のくりこみは，5-6の(63),(58)と一致していることに注意せよ。また，ゲージ固定関数(4)に定数項 w^a が必要であった理由は，φ_i の定数シフト v_i (発散量)を相殺するためであ

る†。] 次に，(13) がくりこまれた量で同じ形にとどまるために

$$K^a_{0\mu}=\tilde{Z}_3{}^{1/2}K^a_\mu, \qquad K_{0i}=(\tilde{Z}_3{}^{1/2}Z_3{}^{1/2}/Z_i{}^{1/2})K_i. \tag{18}$$

さらに，(11) を同じ形にとどめるために

$$K^a_{0c}=Z_3{}^{1/2}K^a_c \tag{19}$$

とすべきことが従う。最後に結合定数 g は

$$g_0=Z_1Z_3^{-3/2}g \tag{20}$$

でくりこむものとする。以上のくりこみのやり方 (15), (17)～(20) をとれば，くりこみ因子 $Z\equiv(Z_1, Z_3, \tilde{Z}_3, Z_i)$ および φ_i 場のシフト v_i の値の選び方いかんに**よらず**常に (11)～(13) の恒等式 [(12) では $w^a=0$ としたもの] がくりこまれた量で成立する，という点に特に注意しておこう。そして，くりこみ可能性の主張 (14) は，Z や v_i を“正しく”選んだときに，くりこまれた有効作用 Γ が Φ, K, g, f, α の有限な (汎) 関数になるということである。

実際の Γ の計算は loop 展開，すなわち $\hbar$ のべき展開による摂動で行う。Z や v_i を $\hbar$ でべき展開し，

$$Z=1+\hbar Z^{(1)}+\hbar^2 Z^{(2)}+\cdots, \tag{21}$$

$$v_i=0+\hbar v_i^{(1)}+\hbar^2 v_i^{(2)}+\cdots, \tag{22}$$

これを (9) の裸の作用積分 $S[\Phi_0, K_0;\ g_0, f_0, \alpha_0]\equiv S_0$ に代入して展開した

$$\begin{aligned} S_0&=S[\Phi_0, K_0;\ g_0, f_0, \alpha_0]\\ &=S[Z_3^{1/2}A^a_\mu, \cdots, \tilde{Z}_3^{1/2}K^a_\mu, \cdots;\ Z_1Z_3^{-3/2}g, \cdots] \qquad (23)\\ &=S^{(0)}+\hbar S^{(1)}+\hbar^2 S^{(2)}+\cdots,\end{aligned}$$

$$S^{(0)}=S[\Phi, K;\ g, f, \alpha]\ (\equiv S) \tag{24}$$

の初項 $S^{(0)}$ (以下これを単に S と記す) を摂動第 0 次の作用，第 2 項以降 $S^{(n)}$ ($n\geqq 1$) を相殺項として用いて，すべての 1PI グラフを計算する。そうすれば有効作用 Γ は，$\hbar$ の各次数で逐次得られる：

$$\Gamma=\Gamma^{(0)}+\hbar\Gamma^{(1)}+\hbar^2\Gamma^{(2)}+\cdots. \tag{25}$$

この節では，大局的ゲージ対称性が自発的に破れない場合を考察することにして，v_i の展開 (22) の初項は 0 とした。今の我々の一般的線形ゲージ

---

† 一般に，そもそも，ゲージ固定関数 (4) の B^a 以外の部分 $F^a(A, \varphi, B=0)$ の真空期待値は 0 でなければ矛盾する。なぜなら，B^a の外場 J^a_B が 0 のときの B^a の運動方程式 $\alpha_0 B^a_0+F^a(A_0, \varphi_0, B_0=0)=0$ と真空の BRS 不変性より，$0=\langle 0|\{Q_B, \bar{c}^a_0\}|0\rangle=\langle 0|B^a_0|0\rangle=-\alpha_0^{-1}\langle 0|F^a(A_0, \varphi_0, B_0=0)|0\rangle$ が従うからである。定数項 w^a はこれを保証するために必要な項なのである。

(4) の場合は，$f_i^a\varphi_i$ の項が大局的ゲージ不変性を破るが，係数 f_i^a も添字に応じて共変に変換する量とみなせば形式的にこの不変性を保つと考えることができる。以下，大局的ゲージ不変量というときには，この了解をするものとしておく。

くりこみ可能性の証明　これから，(21),(22) の Z や v_i を $\hbar$ の各次数で次々適当に選んでゆけば，くりこまれた Γ も，(25) の展開の任意次数まで有限にできることを示そう。

まず，Γ の NL 場 B^a への依存性は自明であることに注意する。すなわち，恒等式 (12) を，裸の量で書いた (16) またはくりこんだ量で書いた式 [(12) で $w^a=0$ としたもの] から，B^a 依存部分があらわに決まって

$$\Gamma=\tilde{\Gamma}+\int d^4x\left[B_0^a(f_{0I}^a\phi_{0I}+w^a)+\frac{1}{2}\alpha_0B_0^aB_0^a\right] \tag{26}$$

$$=\tilde{\Gamma}+\int d^4x\left[B^af_I^a\phi_I+\frac{1}{2}\alpha B^aB^a\right] \tag{27}$$

となり，残りの $\tilde{\Gamma}$ 部分は B^a に全然よらないことがわかる。しかも，上のくりこみ法から，(26) と (27) は等しいので，くりこみ因子 Z や v_i の値を以下でどう決めようと，この B^a 依存部分はくりこんだ量で書いて有限な表式になっている。したがって，以下 B^a を忘れて $\tilde{\Gamma}$ 部分のみを考えればよい。

さらに，反ゴースト場 $\bar{c}^a$ への依存性もほとんど自明である。くりこまれた恒等式 (13) は，Γ (または $\tilde{\Gamma}$) の $\bar{c}^a$ 依存性が

$$\begin{gathered}\tilde{K}_I\equiv K_I+i\bar{c}^af_I^a,\\ \text{すなわち，}\ \tilde{K}_\mu^a=K_\mu^a+i\bar{c}^a\partial_\mu,\qquad \tilde{K}_i=K_i+i\bar{c}^af_i^a,\end{gathered} \tag{28}$$

という変数 $\tilde{K}_I$ を通じてのみ現れることを示している。すなわち，$\tilde{\Gamma}$ の変数を $\phi_I, c^a, \bar{c}^a, \tilde{K}_I$ にとり直せば，(13) は

$$\left(f_I^a\frac{\delta\bar{c}^b}{\delta K_I}+i\frac{\delta\bar{c}^b}{\delta\bar{c}^a}\right)\left(\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\bar{c}^b}\right)_{\tilde{K}}+\left(f_I^a\frac{\delta\tilde{K}_J}{\delta K_I}+i\frac{\delta\tilde{K}_J}{\delta\bar{c}^a}\right)\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\tilde{K}_J}=i\left(\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\bar{c}^a}\right)_{\tilde{K}}=0 \tag{29}$$

となるから，$\tilde{\Gamma}$ が $\bar{c}^a$ に依存しないことがわかる。この点も，Z や v_i の値の具体的選び方によらないので，以下 K_I をすべて $\tilde{K}_I$ として，$\bar{c}^a$ を忘れてよいことになる。

以上のことから，$\tilde{\Gamma}$ は，今や $\phi_I, c^a, \tilde{K}_I, K_c^a$ (それに g, f, α) のみの汎関数である。残りの WT 恒等式 (11) は，(27) を代入して，この $\tilde{\Gamma}$ に対して

$$\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\phi_I}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\tilde{K}_I}+\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta c^a}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K_c^a}=0 \tag{30}$$

の形の恒等式となる。ここで，Poisson 括弧 5-2 (11) に類似した次の $*$ 演算を定義する。F, G を任意の $\phi_I, c^a, \tilde{K}_I, K_c^a$ の (Grassmann 偶または奇の) 汎関数として，

$$\begin{aligned} F*G &\equiv \frac{\delta F}{\delta\phi_I}\frac{\delta G}{\delta\tilde{K}_I}+\frac{\delta F}{\delta K_c^a}\frac{\delta G}{\delta c^a}+(-)^{|F|}\left(\frac{\delta F}{\delta\tilde{K}_I}\frac{\delta G}{\delta\phi_I}+\frac{\delta F}{\delta c^a}\frac{\delta G}{\delta K_c^a}\right) \\ &\equiv \frac{\delta F}{\delta Q_A}\frac{\delta G}{\delta P_A}+(-)^{|F|}\frac{\delta F}{\delta P_A}\frac{\delta G}{\delta Q_A}. \end{aligned} \tag{31}$$

微分はすべて左微分である。ここに，座標類似変数 Q_A，運動量類似変数 P_A と呼んだものは

$$\begin{aligned} Q_A &\equiv (\phi_I, K_c^a) : \text{Grassmann 偶変数} \\ P_A &\equiv (\tilde{K}_I, c^a) : \text{Grassmann 奇変数} \end{aligned} \tag{32}$$

である。実際，(31) は Poisson 括弧に似た性質を持ち，例えば，次の対称性，Jacobi 恒等式

$$\begin{aligned} &F*G=-(-)^{F_1G_1}G*F \qquad (\text{ただし } {}^\forall F \text{ に対し } F_1\equiv|F|+1), \\ &F*(G*H)+(-)^{F_1(G_1+H_1)}G*(H*F) \\ &\qquad\qquad +(-)^{H_1(F_1+G_1)}H*(F*G)=0, \end{aligned} \tag{33}$$

などが成立していることも容易に確かめられる (演習問題 7.2)。

この記号を使えば，(30) の WT 恒等式は，簡明に

$$\tilde{\Gamma}*\tilde{\Gamma}=0 \tag{34}$$

と書ける。

さて，これだけ準備をしておいて，今から本題の Γ の $\hbar$ 展開 (25) の各項 $\hbar^n\Gamma^{(n)}$ が有限にできることを，(34) の恒等式に基づいて帰納法で証明しよう。まず $n=0$ の tree レベルでは，有効作用 $\Gamma^{(0)}$ は (24) の作用積分 $S^{(0)}\equiv S$ に等しく，明らかに有限である。ついでに，Γ と $\tilde{\Gamma}$ との違いは，(27) の示すように tree レベルの項のみである (したがって S と $\tilde{S}$ との違いもそうである) ので，$n\geqq1$ では $\tilde{\Gamma}^{(n)}=\Gamma^{(n)}$ であり，～を省略してよい。

次に，$\hbar^n$ のオーダーまでで，くりこみ定数 Z および v_i を

$$\begin{aligned} (Z)_n &\equiv 1+\hbar Z^{(1)}+\hbar^2 Z^{(2)}+\cdots+\hbar^n Z^{(n)} \\ (v_i)_n &\equiv 0+\hbar v_i^{(1)}+\hbar^2 v_i^{(2)}+\cdots+\hbar^n v_i^{(n)} \end{aligned} \tag{35}$$

ととって，$\Gamma^{(0)}, \Gamma^{(1)}, \cdots, \Gamma^{(n)}$ をすべて有限にできたと仮定する。そこで，Z や v_i に (35) [$(n+1)$ 次以降の $Z^{(n+k)}, v_i^{(n+k)}$ $(k\geqq1)$ をすべて 0 としたも

のであることに注意] を用い (23) に代入した作用積分

$$(S_0)_n \equiv S[(Z_3)_n^{1/2} A_\mu^a, \cdots, (\tilde{Z}_3)_n^{1/2} K_\mu^a, \cdots; (Z_1)_n (Z_3)_n^{-\frac{3}{2}} g, \cdots]$$
$$= S^{(0)} + \hbar S^{(1)} + \cdots + \hbar^n S^{(n)} + \hbar^{n+1} (S^{(n+1)})_n + \hbar^{n+2} (S^{(n+2)})_n + \cdots \tag{36}$$

に基づいて，$\hbar^{n+1}$ のオーダーの有効作用 $\Gamma^{(n+1)}$ を計算する。(36) の展開で n 次以下の $S^{(m)}$ $(m \leqq n)$ に $(\quad)_n$ をつけなかった理由は，Z や v_i の $(n+1)$ 次以降の値 $Z^{(n+k)}$，$v_i^{(n+k)}$ $(k \geqq 1)$ を以下でどうとってもそれらに影響しないからである。一方 $(n+1)$ 次以降の $S^{(n+k)}$ $(k \geqq 1)$ は，それらに依存し，$(S^{(n+k)})_n$ は $Z^{(n+k)} = v_i^{(n+k)} = 0$ $(k \geqq 1)$ ととったときの相殺項を表す。特に $(S^{(n+1)})_n$ は，$\hbar^n$ 以下の $Z^{(m)}$ や $v^{(m)}$ $(m \leqq n)$ の積で $(n+1)$ 次の相殺項となるものである。[例えば，A_μ の 4 次の項 $-(1/4) g_0^2 (A_{0\mu} \times A_{0\nu})^2 = -(1/4) Z_1^2 Z_3^{-1} g (A_\mu \times A_\nu)^2$ からは，$Z_1^{(m)} Z_1^{(k)} (Z_3^{(l)})^p$ $(m+k+pl = n+1,\ 0 \leqq m, k, l \leqq n)$ の係数を持つ $(n+1)$ 次相殺項が現れる。]

$\Gamma^{(n+1)}$ の計算では，仮定により $\Gamma^{(m)}$ $(m \leqq n)$ がすべて有限になっているから，それに効くおのおのの Feynman グラフにおいて，すべての内部グラフは既に有限になっており，出てくる可能な発散は最後の外側の loop 積分を行ったとき初めて現われるもの——overall divergence——のみである。$\hbar^{n+1}$ のオーダーで overall divergence の現れるグラフは，loop 数がもちろん 1 個以上だからその内部に n 次以下の相殺項 $S^{(m)}$ $(m \leqq n)$ しか含み得ず，Z や v_i の $(n+1)$ 次以降の値 $Z^{(n+k)}$, $v_i^{(n+k)}$ $(k \geqq 1)$ のとり方によらない。この overall divergence の寄与の総和を $\Gamma_{\text{overall}}^{(n+1)}[\sum_{m=0}^{n} S^{(m)}]$ と記せば，(36) の n 次の作用積分 $(S_0)_n$ に基づく $\Gamma^{(n+1)}$ の発散項は，

$$\Gamma_{\text{div.}}^{(n+1)} = \Gamma_{\text{overall}}^{(n+1)}\Big[\sum_{m=0}^{n} S^{(m)}\Big] + (S^{(n+1)})_n \tag{37}$$

となる。$(S^{(n+1)})_n$ は，上で述べたように n 次以下の $Z^{(m)}$，$v_i^{(m)}$ の積で作られる $(n+1)$ 次相殺項を用いた tree グラフの寄与である。重要な点は，overall divergence $\Gamma_{\text{overall}}^{(n+1)}$ には，前節の BPHZ くりこみのところで述べたように，外線運動量に関して有限次まで，場の次元も数えると 4 次以下，の局所的項しか現れないということである。$(S^{(n+1)})_n$ ももちろん S_0 と同様この性質を持つから，(37) の $\Gamma_{\text{div.}}^{(n+1)}$ も次元 4 以下の局所的項のみから成る。このような局所的項の積分形で与えられる汎関数を一般に局所的汎関数と呼ぶことにする。

一方，WT 恒等式(34) は，$\hbar$ の値によらず(Z, v_i のとり方にもよらずに)

成立するから，$\hbar$ のべきに展開し，$\hbar^{n+1}$ の項を取り出し

$$\widetilde{\Gamma}^{(0)} * \Gamma^{(n+1)} + \Gamma^{(1)} * \Gamma^{(n)} + \Gamma^{(2)} * \Gamma^{(n-2)} + \cdots = 0 \tag{38}$$

が成り立つ。第 2 項以下は帰納法の仮定により有限である。したがって，この式の発散部分，すなわち，今の次元正則化の場合は $(n-4)^{-k}$ $(k \geqq 1)$ の pole 項†，を取り出せば，$\widetilde{\Gamma}^{(0)} = \widetilde{S}^{(0)} \equiv \widetilde{S}$ であるから

$$\widetilde{S} * \Gamma^{(n+1)}_{\text{div.}} = 0 \tag{39}$$

を得る。この式は，$\Gamma^{(n+1)}$ にどのような発散が現れ得るかを規定する式で，くりこみ方程式 (renormalization equation) と呼ばれる。

このくりこみ方程式に対して，次の命題が証明できる。

[命題] 大局的ゲージ不変，FP ゴースト数 0，次元 4 以下の局所項から成る，$\phi_I, c^a, \widetilde{K}_I, K_c^a$ の局所的汎関数 X が，くりこみ方程式

$$\widetilde{S} * X = 0 \tag{40}$$

を満たすとする。このとき，X は (23) の $S_0 = S[Z_3{}^{1/2} A_\mu^a, \cdots, \widetilde{Z}_3{}^{1/2} K_\mu^a, \cdots ; Z_1 Z_3^{-3/2} g, \cdots]$ で，Z や v_i をずらせて得られる変化分

$$\delta Z(\varDelta_Z S) + \delta v_i(\varDelta_{v_i} S) \equiv \delta Z \left[\frac{\partial S_0}{\partial Z}\right]_{Z-1=v_i=0} + \delta v_i \left[\frac{\partial S_0}{\partial v_i}\right]_{Z-1=v_i=0} \tag{41}$$

の形で与えられる††。

もし，この命題が証明されたとすると，今の場合，(39),(41) より

$$\Gamma^{(n+1)}_{\text{div.}} = \alpha_Z^{(n+1)}(\varDelta_Z S) + \beta_i^{(n+1)}(\varDelta_{v_i} S)$$

の形となることがいえることになる。ところが，この形の発散項は，Z や v_i を，(35) で与えた n 次の値 $(Z)_n, (v_i)_n$ から，$(n+1)$ 次の値

$$\begin{aligned} (Z)_{n+1} &= (Z)_n + \hbar^{n+1} Z^{(n+1)}, \\ (v_i)_{n+1} &= (v_i)_n + \hbar^{n+1} v_i^{(n+1)}, \end{aligned} \tag{42}$$

へずらしたときに生ずる $\hbar^{(n+1)}$ オーダーの**新たな**相殺項

$$S^{(n+1)} - (S^{(n+1)})_n = Z^{(n+1)}(\varDelta_Z S) + v_i^{(n+1)}(\varDelta_{v_i} S) \tag{43}$$

により，$Z^{(n+1)} = -\alpha_Z^{(n+1)}$，$v_i^{(n+1)} = -\beta_i^{(n+1)}$ と選べば，ちょうど吸収できる。それゆえ，(42) の $(Z)_{n+1}, (v_i)_{n+1}$ を (23) に代入した作用 $(S_0)_{n+1}$ に基づいた有効作用 Γ は，$\hbar^{n+1}$ のオーダーの $\Gamma^{(n+1)}$ まで有限となり，帰納法による

---

† 一つの loop 積分で $1/(n-4)$ の特異性は 1 次ずつしか出ないから，$\Gamma^{(n+1)}$ の特異性は $1/(n-4), 1/(n-4)^2, \cdots, 1/(n-4)^{n+1}$ までである。次元の n と $\hbar$ 展開の次数 n とを混同しないように。

†† S と $\widetilde{S}$ の差は tree level のみであり Z や v_i に依存しないから，(41) は $\widetilde{S}$ の変化分といってもよい。

くりこみ可能性証明が完結したことになる。

命題の証明 結局，くりこみ可能性の証明は，(40) のくりこみ方程式の一般解が (41) の形で与えられる，という純粋に代数的な命題の証明に帰着することがわかった。

くりこみ方程式 $\tilde{S} * X=0$ の解 X に関しては，次元 4 以下，大局的ゲージ不変という制限のない次の定理が成立することが知られている：

[定理] $\phi_I, c^a, \tilde{K}_I, K_c^a$ の FP ゴースト数が 0 の局所多項式から成る汎関数 X で，くりこみ方程式 (40) を満たすものは，必ず

$$X=F_{ゲージ不変}[\phi_I]+\tilde{S} * M[\phi_I, c^a, \tilde{K}_I, K_c^a] \tag{44}$$

の形に書ける。$F_{ゲージ不変}$ は $\phi_I=(A_\mu^a, \varphi_i)$ のみで書かれるゲージ不変な汎関数で，M はゴースト数 -1 の任意の汎関数である。

(44) の形の X がくりこみ方程式 $\tilde{S} * X=0$ を満たすことは，$\tilde{S}$ の BRS 不変性 $\tilde{S} * \tilde{S}=0$ および Jacobi 恒等式 (33) から従う $\tilde{S}*$ 演算のベキ零性

$$\tilde{S} *(\tilde{S} * {}^\forall X)=-\frac{1}{2} X *(\tilde{S} * \tilde{S})=0 \tag{45}$$

から自明である (演習問題 7.2 参照)。自明でないのは逆である。この定理は，**5-10** で与えた局所的観測可能量の一般形に関する定理 **5-10** (23) を外場項 K_I, K_c^a を含む場合に拡張したものに相当し，大変有用なものであるが，一般的証明はかなり面倒なので文献に譲る。しかし，今必要な X が次元 4 以下の局所項から成る大局的ゲージ不変な場合に限れば，次のように容易に示すことができる。

(証明) 話を明確にするため，今，物質場 φ_i としてはゲージ群 G のある既約表現に属するスカラー場のみが存在する場合を考えよう。[可約表現の場合やスピノール場が存在する場合も本質的に同様にやれることがわかる。] すなわち，系のゲージ不変 Lagrangian 部分 (1) が

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GI}}(\phi_I)=-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}+(D_\mu \varphi_i)^{\dagger} D^\mu \varphi_i-\mu^2 \varphi_i^{\dagger} \varphi_i-\frac{\lambda}{2}(\varphi_i^{\dagger} \varphi_i)^2 \tag{46}$$

で与えられる場合である。このとき，作用積分 $\tilde{S}$ は (9), (27), (6) より，

$$\begin{gathered}
\tilde{S}=\int d^4 x[\mathcal{L}_{\mathrm{GI}}(\phi_I)+\tilde{K}_I \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}} \phi_I+K_c^a \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}} c^a] \\
\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}} \phi_I=D_I^a c^a, \qquad \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}} c^a=-\frac{1}{2} g(c \times c)^a
\end{gathered} \tag{47}$$

の形に書くことができる。

一方，問題の X は，次元 4 以下の局所項から成る FP ゴースト数 N_{FP} が

0の大局的ゲージ不変な汎関数と仮定したので，その一般形は，$\widetilde{K}_I$ が $N_{\rm FP}=-1$，次元2，K_c^a が $N_{\rm FP}=-2$，次元2，(一般線形ゲージ(4)中の係数) f_i^a が $N_{\rm FP}=0$，次元1，の量であることなどに注意して，

$$X=\int d^4x[\mathcal{L}'(\phi_I)+\widetilde{K}_I\boldsymbol{\delta}'_{\rm B}\phi_I+K_c^a\boldsymbol{\delta}'_{\rm B}c^a] \tag{48}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\delta}'_{\rm B}\phi_I=\begin{cases}\boldsymbol{\delta}'_{\rm B}A_\mu^a\equiv\gamma_A\partial_\mu c^a+\beta_A gf_{abc}A_\mu^bc^c+\gamma_d gd_{abc}A_\mu^bc^c,\\ \boldsymbol{\delta}'_{\rm B}\varphi_i\equiv\beta_\varphi(ig)c^aT_{ij}^a\varphi_j+\gamma_\varphi(ig)c^ad_{ij}^{ab}f_j^b,\end{cases}\\ &\boldsymbol{\delta}'_{\rm B}c^a\equiv\beta_c\left(-\frac{1}{2}g\right)f_{abc}c^bc^c,\end{aligned} \tag{49}$$

で与えられる†。$\mathcal{L}'(\phi_I)$ は $\phi_I=(A_\mu^a,\varphi_i)$ のみの次元4以下の関数で，$\gamma_A, \gamma_d, \gamma_\varphi, \beta_A, \beta_\varphi, \beta_c$ は任意の係数，d_{abc} は $\mathrm{tr}(T^a\{T^b, T^c\})$ に比例する対称不変テンソル，d_{ij}^{ab} は，φ_i の表現行列 T_{ij}^a や d_{abc} などのゲージ群 G の不変テンソルで構成される添字$\binom{ab}{ij}$の変換性を持つ不変テンソル(もちろん，存在すれば)である。

くりこみ方程式 $\widetilde{S}*X=0$ の要請は，$*$演算の定義(31)および，$\widetilde{S}, X$ の $\widetilde{K}_I, K_c^a$ 依存性に注意して，

$$\left(\frac{\delta X}{\delta\widetilde{K}_I}\right)\frac{\delta}{\delta\phi_I}+\left(\frac{\delta X}{\delta K_c^a}\right)\frac{\delta}{\delta c^a}=(\boldsymbol{\delta}'_{\rm B}\phi_I)\frac{\delta}{\delta\phi_I}+(\boldsymbol{\delta}'_{\rm B}c^a)\frac{\delta}{\delta c^a}\equiv\boldsymbol{\delta}'_{\rm B} \tag{50}$$

でBRS変換 $\boldsymbol{\delta}_{\rm B}$ に類似した変換 $\boldsymbol{\delta}'_{\rm B}$ を定義すれば，$\boldsymbol{\delta}_{\rm B}X+\boldsymbol{\delta}'_{\rm B}\widetilde{S}=0$ と書けることがわかる。すなわち，$\widetilde{S}$ と X の表式(47),(48)を代入して，次の方程式となる：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\delta}_{\rm B}\mathcal{L}'(\phi_I)-\widetilde{K}_I\boldsymbol{\delta}_{\rm B}(\boldsymbol{\delta}'_{\rm B}\phi_I)+K_c^a\boldsymbol{\delta}_{\rm B}(\boldsymbol{\delta}'_{\rm B}c^a)\\ &\quad+\boldsymbol{\delta}'_{\rm B}\mathcal{L}_{\rm GI}(\phi_I)-\widetilde{K}_I\boldsymbol{\delta}'_{\rm B}(\boldsymbol{\delta}_{\rm B}\phi_I)+K_c^a\boldsymbol{\delta}'_{\rm B}(\boldsymbol{\delta}_{\rm B}c^a)=0.\end{aligned} \tag{51}$$

この方程式は，任意の $\widetilde{K}_I, K_c^a$ について成立せねばならないから，

$$\boldsymbol{\delta}_{\rm B}\mathcal{L}'(\phi_I)+\boldsymbol{\delta}'_{\rm B}\mathcal{L}_{\rm GI}(\phi_I)=0, \tag{52}$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\rm B}\boldsymbol{\delta}'_{\rm B}+\boldsymbol{\delta}'_{\rm B}\boldsymbol{\delta}_{\rm B}=\{\boldsymbol{\delta}_{\rm B},\boldsymbol{\delta}'_{\rm B}\}=0 \qquad (\phi_I, c^a\text{ の上で}), \tag{53}$$

が従う。(6),(47)で与えられるBRS変換 $\boldsymbol{\delta}_{\rm B}$ と，(49)で与えられる $\boldsymbol{\delta}'_{\rm B}$ 変換が反可換であるという(53)の要請は，ゴースト場 c^a の上では自動的に満たされるが，容易に確められるように，ゲージ場 A_μ^a の上で成立するには，(49)の係数 $\beta_A, \beta_c, \gamma_d$ が

† φ_i が随伴表現の場合は，$\boldsymbol{\delta}'_{\rm B}\varphi_i$ に $\delta_i^ac^a$ (δ_i^a：Kronecker のデルタ)の項があっても一見よいように思えるが，系が $\varphi_i\to-\varphi_i$, $f_i^a\to-f_i^a$ の変換の下での不変性を持つので，この項は許されない。

$$\beta_A=\beta_c, \qquad \gamma_d=0, \tag{54}$$

を満たすべきこと，さらにスカラー場 φ_i の上で成立するには，

$$\beta_\varphi=\beta_c, \tag{55}$$

の条件の他，不変テンソル d^{ab}_{ij} が

$$T^a_{ij}d^{bd}_{jk}-T^b_{ij}d^{ad}_{jk}=if_{abc}d^{cd}_{ik} \tag{56}$$

を満たすべきこと，を導く。(56) は，不変テンソル d^{ab}_{ij} がさらに分解されて

$$d^{ab}_{ik}=T^a_{ij}d^b_{jk} \tag{57}$$

の形を持つことを意味している。(54),(55),(57) が (53) から出る情報のすべてである。

次に (52) を解いて $\mathcal{L}'(\phi_I)$ の形を決めねばならない。(49) に与えた $\boldsymbol{\delta}'_{\mathrm{B}}$ 変換は，元の BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}$ に係数 $\beta_A=\beta_\varphi=\beta_c$ で比例した部分を抜き出せば，

$$\boldsymbol{\delta}'_{\mathrm{B}}=\beta_A\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}+(\gamma_A-\beta_A)(\partial_\mu c^a)\frac{\delta}{\delta A^a_\mu}+\gamma_\varphi(igc^aT^a_{ij}d^b_{jk}f^b_k)\frac{\delta}{\delta\varphi_i} \tag{58}$$

と書けること，さらに，この右辺第 2，第 3 項の微分演算子が

$$\begin{aligned}
(\partial_\mu c^a)\frac{\delta}{\delta A^a_\mu}&=\left[(\partial_\mu c^a+gf_{abc}A^b_\mu c^c)\frac{\delta}{\delta A^a_\mu},\ A^d_\nu\frac{\delta}{\delta A^d_\nu}\right]\\
&=\left[\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}},A^a_\mu\frac{\delta}{\delta A^a_\mu}\right]\\
-(igc^aT^a_{ij}d^b_{jk}f^b_k)\frac{\delta}{\delta\varphi_i}&=\left[igc^aT^a_{ij}\varphi_j\frac{\delta}{\delta\varphi_i},\ (d^b_{kl}f^b_l)\frac{\delta}{\delta\varphi_k}\right]\\
&=\left[\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}},(d^a_{ij}f^a_j)\frac{\delta}{\delta\varphi_i}\right]
\end{aligned} \tag{59}$$

のように，BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}$ と何かの交換関係の形に書けることに注意する。そうすれば，$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\mathcal{L}_{\mathrm{GI}}(\phi_I)=0$ であるから，(52) の方程式は

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\mathcal{L}'(\phi_I)=\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\left[(\beta_A-\gamma_A)A^a_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{GI}}}{\partial A^a_\mu}+\gamma_\varphi d^a_{ij}f^a_j\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{GI}}}{\partial\varphi_i}\right] \tag{60}$$

となり，明らかに右辺の [　] の中の量が $\mathcal{L}'(\phi_I)$ の特解を与える。斉次 (1 階微分) 方程式 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\mathcal{L}'(\phi_I)=0$ の一般解は，$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}$ は $\phi_I=(A^a_\mu,\varphi_i)$ 上ではゲージ変換に過ぎないから，ゲージ不変な一般的関数であり，したがって (60) の一般解は

$$\mathcal{L}'(\phi_I)=f_{\text{ゲージ不変}}(\phi_I)+(\beta_A-\gamma_A)A^a_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{GI}}}{\partial A^a_\mu}+\gamma_\varphi d^a_{ij}f^a_j\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{GI}}}{\partial\varphi_i} \tag{61}$$

で与えられることがわかる。$\mathcal{L}'(\phi_I)$ は次元 4 以下であったから，ゲージ不変関数 $f_{\text{ゲージ不変}}(\phi_I)$ の一般形は，

$$f_{ゲージ不変}(\phi_I)$$
$$=\alpha_A\left(-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}\right)+\alpha_\varphi(D_\mu\varphi)^\dagger D^\mu\varphi-\alpha_m\mu^2\varphi^\dagger\varphi-\alpha_\lambda\frac{\lambda}{2}(\varphi^\dagger\varphi)^2 \qquad (62)$$

で与えられる。

結局，くりこみ方程式の解 X は，(48) に (58),(61) を代入して

$$X=\int d^4x\left\{f_{ゲージ不変}(\phi_I)+\beta_A(\widetilde{K}_I\boldsymbol{\delta}_B\phi_I+K^a_c\boldsymbol{\delta}_B c^a)\right.$$
$$+(\beta_A-\gamma_A)\left[A^a_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_{GI}}{\partial A^a_\mu}-\widetilde{K}^a_\mu\partial^\mu c^a\right]$$
$$\left.+\gamma_\varphi d^a_{jk}f^a_k\left[\frac{\partial(\mathcal{L}_{GI}+\widetilde{K}_i\boldsymbol{\delta}_B\varphi_i)}{\partial\varphi_j}\right]\right\} \qquad (63)$$

と書ける。ところが，ここで，(47),(31) より従う等式

$$\widetilde{S}*(\widetilde{K}^a_\mu A^{a\mu})=A^a_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_{GI}}{\partial A^a_\mu}-\widetilde{K}^a_\mu\partial^\mu c^a, \qquad (64)$$

$$\widetilde{S}*(K^a_c c^a)=-c^a\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta c^a}+K^a_c\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta K^a_c}, \qquad (65)$$

に注意する。この第 2 式 (65) は，さらに，$\widetilde{S}$ の FP ゴースト数 N_{FP} が 0 ($\widetilde{K}_I$ は $N_{FP}=-1$，K^a_c は $N_{FP}=-2$，c は $N_{FP}=+1$) であることを意味する等式

$$\left[c^a\frac{\delta}{\delta c^a}-\widetilde{K}_I\frac{\delta}{\delta\widetilde{K}_I}-2K^a_c\frac{\delta}{\delta K^a_c}\right]\widetilde{S}=0 \qquad (66)$$

を用いれば，

$$\widetilde{S}*(K^a_c c^a)=-\widetilde{K}_I\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta\widetilde{K}_I}-K^a_c\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta K^a_c}=-(\widetilde{K}_I\boldsymbol{\delta}_B\phi_I+K^a_c\boldsymbol{\delta}_B c^a) \qquad (67)$$

となる。したがって，(64),(67) を使えば，解 X の一般形 (63) が

$$X=\int d^4x\left\{f_{ゲージ不変}(\phi_I)+\widetilde{S}*[(\beta_A-\gamma_A)\widetilde{K}^a_\mu A^{a\mu}-\beta_A K^a_c c^a+\gamma_\varphi\widetilde{K}_i d^a_{ij}f^a_j]\right\} \qquad (68)$$

の形にまとめられることがわかり，定理の主張する (44) の形に書けることが証明された。(証明終)

これで，上の定理を次元 4 以下の場合に証明したわけだが，まだ，我々の直接必要とする命題，すなわち，その解 X が (41) の形で与えられること，を証明する仕事が残っている。

これを示すには，X の表式 (63) から出発する方が速い。まず

$$\left(A^a_\mu\frac{\partial}{\partial A^a_\mu}-g\frac{\partial}{\partial g}\right)\mathcal{L}_{GI}(\phi_I)=2\times\left(-\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu}\right) \qquad (69)$$

に注意する。これは $\mathcal{L}_{\rm GI}(\phi_I)$ で gA^a_μ を A^a_μ に変数変換すれば，物質場 Lagrangian 部分は g によらなくなり，ゲージ場部分は $-F^2_{\mu\nu}/4g^2$ となることから従う。次に，$\widetilde{K}_I\boldsymbol{\delta}_{\rm B}\phi_I+K^a_c\boldsymbol{\delta}_{\rm B}c^a$ は，$\widetilde{K}^a_\mu\partial^\mu c^a$ の項以外はすべて g の1次項であるので

$$\left(g\frac{\partial}{\partial g}-1\right)(\widetilde{K}_I\boldsymbol{\delta}_{\rm B}\phi_I+K^a_c\boldsymbol{\delta}_{\rm B}c^a)=-\widetilde{K}^a_\mu\partial^\mu c^a \tag{70}$$

を満たす。(69) と (70) より，(47) を考慮して

$$\begin{aligned}&\int d^4x\left[A^a_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_{\rm GI}}{\partial A^a_\mu}-\widetilde{K}^a_\mu\partial^\mu c^a\right]\\&=g\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial g}+\int d^4x\left[2\left(-\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu}\right)-(\widetilde{K}_I\boldsymbol{\delta}_{\rm B}\phi_I+K^a_c\boldsymbol{\delta}_{\rm B}c^a)\right].\end{aligned} \tag{71}$$

したがって，X の表式 (63) は，$f_{ゲージ不変}$ の表式 (62) をあらわに書いて

$$\begin{aligned}X=\int d^4x&\left[(\alpha_A+2\beta_A-2\gamma_A)\left(-\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu}\right)+\alpha_\varphi|D_\mu\varphi|^2-\alpha_m\mu^2|\varphi|^2\right.\\&\left.-\alpha_\lambda\frac{\lambda}{2}|\varphi|^4+\gamma_A(\widetilde{K}_I\boldsymbol{\delta}_{\rm B}\phi_I+K^a_c\boldsymbol{\delta}_{\rm B}c^a)\right]\\&+\gamma_\varphi d^a_{ij}f^a_j\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial\varphi_i}+(\beta_A-\gamma_A)g\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial g}\end{aligned} \tag{72}$$

となる。

一方，作用積分 $\widetilde{S}$ の引数に，(15), (18), (19), (20) のくりこみ処法で指定される Z や v_i を含んだ裸の量 Φ_0, K_0, g_0 を入れたものは，

$$\begin{aligned}&\widetilde{S}[Z_3{}^{1/2}A^a_\mu,\cdots,\widetilde{Z}_3{}^{1/2}K^a_\mu,\cdots;Z_1Z_3^{-3/2}g,\cdots]\\&=\int d^4x\left[Z_3\left(-\frac{1}{4}\right)(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+Z_1Z_3^{-1}gA_\mu\times A_\nu)^2\right.\\&\qquad+Z_i\left|\partial_\mu\varphi'_i-iZ_1Z_3^{-1}gT^a_{ij}A^a_\mu\varphi'_j\right|^2-Z_mZ_i\mu^2|\varphi'|^2\\&\qquad-Z_\lambda Z_i^2\frac{\lambda}{2}|\varphi'|^4+\widetilde{Z}_3\widetilde{K}_\mu(\partial_\mu c+Z_1Z_3^{-1}gA_\mu\times c)\\&\qquad\left.+\widetilde{Z}_3\widetilde{K}_i i Z_1Z_3^{-1}gT^a_{ij}c^a\varphi'_j+\widetilde{Z}_3K_c\left(-\frac{1}{2}Z_1Z_3^{-1}g\right)(c\times c)\right]\end{aligned} \tag{73}$$

となる。ただし，φ'_i は φ_i+v_i の意であり，Z_m, Z_λ は今あらわに考えている物質場の質量と $\lambda\varphi^4$ 結合定数のくりこみ因子で次式で定義した：

$$\mu_0^2=Z_m\mu^2,\qquad \lambda_0=Z_\lambda\lambda. \tag{74}$$

我々の望みの命題のいう，Z 因子や v_i をずらしたときの S の変化分 (41)

(これは，(41) の下の脚注に述べたように $\widetilde{S}$ の変化分と同じ) は，(73) より

$$\begin{aligned}&\delta Z(\varDelta_Z S)+\delta v_i(\varDelta_v S)\\&\quad=\int d^4x\left[\delta Z_3\left(-\frac{1}{4}\right)F_{\mu\nu}^2+\delta Z_i|D_\mu\varphi|^2-(\delta Z_m+\delta Z_i)\mu^2|\varphi|^2\right.\\&\qquad\left.-(\delta Z_\lambda+2\delta Z_i)\frac{\lambda}{2}|\varphi|^4+\delta\widetilde{Z}_3(\widetilde{K}_I\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\phi_I+K_c\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}c)\right]\\&\quad+\delta v_i\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial\varphi_i}+(\delta Z_1-\delta Z_3)g\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial g}\end{aligned}\tag{75}$$

となることがわかる。この形は果たして (72) で与えたくりこみ方程式の一般解 X の表式とぴったり一致している。すなわち，くりこみ因子 Z と v_i のずれは，(72) のパラメータ α,β,γ で次のように決まる†：

$$\begin{aligned}&\delta Z_3=-(\alpha_A+2\beta_A-2\gamma_A),\qquad \delta\widetilde{Z}_3=-\gamma_A,\\&\delta Z_i=-\alpha_\varphi,\qquad \delta Z_m=-\alpha_m+\alpha_\varphi,\qquad \delta Z_\lambda=-\alpha_\lambda+2\alpha_\varphi,\\&\delta v_i=-\gamma_\varphi d_{ij}^a f_j^a,\qquad \delta Z_1=\frac{1}{2}\alpha_A-\frac{3}{2}(\alpha_A+2\beta_A-2\gamma_A).\end{aligned}\tag{76}$$

以上で命題の証明が，したがって，ゲージ理論のくりこみ可能性の証明が終わった。

7-5　質量によらない対称なくりこみ

前節のゲージ理論のくりこみ可能性の議論では，対称性の自発的破れがないと仮定し，大局的ゲージ不変性の要請を多くのところで用いた。しかし，対称性が自発的に破れてHiggs現象が起こっている場合でも，ゲージ理論は依然としてくりこみ可能である。実際，前節では対称性が自発的に破れていない場合を考えたのだが，対称性をあらわに破るパラメータ f_i^a (7-4 (4) の中の φ_i の係数) を含む一般線形ゲージの場合を議論したので，スカラー場 φ_i は量子補正で真空期待値 v_i (7-4 (22) 参照) を持ち，自発的破れのある場合と本質的に同様な状況を既に考えたことになっている。すなわち，対称性の自発的破れがある場合には，スカラー場 φ_i は tree レベルで 0 でない真空期待値 $v_i^{(0)}$ を持つのだが，そのパラメータ $v_i^{(0)}$ を，前節のゲージ固定項のパラメータ f_i^a と同様に，大局的ゲージ変換の下で，その添字

† (76) で符号を逆にしたのは，X の方の表式を $\varGamma$ の発散項としたとき，S の変化分を**加えて**相殺すべきだからである。

に応じた変換をする共変量とみなすことにすれば，依然として大局的ゲージ不変性の要求を用いた議論ができるのである。そうすれば，前節の議論で大局的ゲージ不変性を用いたところで，新たに $v_i^{(0)}$ が φ_i と同じ変換をする次元1の量として加わるという点のみを考え直せばよく，結局，前と同じく，くりこみ因子 Z や真空期待値 v をシフトすることによってすべての発散をくりこむことができることがわかる。

この節では，これをあらわに行うことをせず，むしろ，対称性の自発的に破れた理論のくりこみを，自発的破れを起こしていない対称な理論のくりこみに帰着させる方法を述べる。この方法の基本的考え方はこうである：摂動論の範囲内では，対称性の自発的破れを起こしている場合と起こしていない場合の違いは，単にスカラー場 φ の質量項 $-\mu^2|\varphi|^2$ の μ^2 の符号だけである。ところが，くりこみの一般論の **7-3** 命題1からもわかるように，このような次元2の質量項の違いは，ゲージ理論のくりこみの本質的な部分である次元4（または3）の演算子の（発散部分の）くりこみには影響を与えないのである。このことを反映して，実際，任意の理論において，そこに現れる場の質量パラメータに依存しない形でくりこみができること，したがって，質量パラメータを変数とする（連続無限個の）理論の1組が1度に有限にできること，を示せる。このくりこみ方法を質量によらないくりこみ (mass-independent renormalization) と呼ぶ。これを利用して，対称な理論で1度くりこみをやれば，理論は（ゲージ理論でも何でも）質量パラメータ μ^2 の値によらず一挙に有限となるので，$\mu^2<0$ の自発的に対称性の破れた理論も有限になっているのである。

質量によらないくりこみ　このくりこみ法は，もともと 't Hooft と Weinberg により提唱されたが，ここでは Callan（キャラン）に従って，最も簡単なスカラー理論の場合に説明しよう。例として，$O(N)$ 対称性を持つ $\lambda\phi^4$ 理論をとることにすれば，その摂動第0次の Lagrangian は

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-\frac{1}{2}m^2\phi^2-\frac{1}{8}\lambda(\phi^2)^2, \qquad \phi\equiv(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_N) \quad (1)$$

で与えられる。ここに，$\phi^2=\sum_{i=1}^N(\phi_i)^2$ であり，m^2 は2乗質量パラメータで正とは限らない。[通常の μ^2 の文字は，後でくりこみ点を表すのに用いたいので残しておく。]

(1) の理論の有効作用 Γ を有限にするためには，2次発散する2点頂点

関数 $\Gamma^{(2)}$ と対数発散する 4 点頂点関数 $\Gamma^{(4)}$ に対して適当なくりこみ条件を設定して発散を除去せねばならない。質量によらないくりこみ法の本質的な点は，$\Gamma^{(n)}$ を質量パラメータ m^2 の**関数として**有限にしようというところにある。それゆえ，m^2 を $\Gamma^{(n)}$ の運動量変数 p などと同等に扱い，例えば，次のようなくりこみ条件を設定する：

$$\Gamma_{ij}^{(2)}(p^2=0, m^2, \lambda\,;\,\mu^2)|_{m^2=0}=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial m^2}\Gamma_{ij}^{(2)}(p^2=0, m^2, \lambda\,;\,\mu^2)|_{m^2=\mu^2}=-\delta_{ij}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma_{ij}^{(2)}(p^2, m^2, \lambda\,;\,\mu^2)|_{p^2=0, m^2=\mu^2}=+\delta_{ij}, \tag{4}$$

$$\Gamma_{ijkl}^{(4)}(\boldsymbol{p}=0, m^2, \lambda\,;\,\mu^2)|_{m^2=\mu^2}=-\lambda\delta_{ijkl}. \tag{5}$$

ただし $\boldsymbol{p}$ は一般に n 点関数のとき $(p_1, p_2, \cdots, p_{n-1})$ $[p_n=-(p_1+\cdots+p_{n-1})]$ を表し，

$$\delta_{ijkl}\equiv\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}. \tag{6}$$

2 点関数 $\Gamma^{(2)}$ は 2 次発散なので，その（次元 2 の）引数 m^2 および p^2 で Taylor 展開すれば，発散次数は 2 ずつ下がり，初項が 2 次発散，次の $\partial\Gamma^{(2)}/\partial m^2$ と $\partial\Gamma^{(2)}/\partial p^2$ が対数発散，それ以降は収束，ということになる。(2), (3), (4) のくりこみ条件は，この発散する初めの 3 項に対する条件で，(2) は質量パラメータ m^2 が 0 のときは粒子が本当に零質量となるべし，(3), (4) は m^2 がある値 $\mu^2\,(>0)$ のとき，$p^2=0$ での $\Gamma^{(2)}$ の p^2, m^2 に関する微係数が tree レベルの $\Gamma_{ij}^{(2)}=\delta_{ij}(p^2-m^2)$ の満たす値からずれるな，という要請である。これに対し 4 点関数 $\Gamma^{(4)}$ は対数発散であるから，(m^2, p^2) 平面のどこか 1 点の値を指定すればよい。(5) の条件は，$m^2=\mu^2$ のとき，$\Gamma^{(4)}$ の $\boldsymbol{p}=0$ での値が tree レベルの値 $-\lambda\delta_{ijkl}$ からずれないというくりこみ条件である。(2) の条件が $m^2=0$ で与えられているのに対し，(3)～(5) の条件を $m^2=\mu^2\,(>0)$ で与えたのは，(3)～(5) の量が対数発散なので，m^2 も $\boldsymbol{p}$ も皆 0 にすると赤外発散するからである。[対数発散量は，切断パラメータを Λ^2 とすると $\ln\Lambda^2$ であるが，次元を持つ Λ^2 の対数関数というのは物理的にあり得ず，必ず無次元量の関数として $\ln[\Lambda^2/(ap^2+bm^2)]$ のような形で現れる。それゆえ $p=0$ としたときには m^2 は 0 とはおけないのである。] くりこみ条件を与えた m^2 の値 μ^2 をくりこみ点 (renormalization point) と呼ぶ。このことからくりこまれた $\Gamma^{(n)}$ はくりこみ点 μ^2 に依存するようになるので，(2)～(5) の $\Gamma^{(2)}$, $\Gamma^{(4)}$ の引数として μ^2 をあらわに

書いたのである。

くりこみ条件 (2)～(5) を実現するためには，次の相殺項が必要となる：

$$\mathcal{L}_{\text{count.}}=\frac{A}{2}(\partial_\mu\phi)^2-\frac{B}{2}m^2\phi^2-\frac{1}{2}\delta m^2\phi^2-\frac{C}{8}\lambda(\phi^2)^2. \tag{7}$$

すなわち，摂動論 (例えば $\hbar$ 展開) の各オーダーごとに，相殺項の係数 A, B, δm^2, C を決めてゆく。くりこみ条件 (2) は δm^2 の，(3) は B の，(4) は A の，(5) は C の，自由度を用いてそれぞれ満たすようにできる。(7) の相殺項を加えてゆくということは，系の裸の Lagrangian $\mathcal{L}_0$ として

$$\mathcal{L}_0=\mathcal{L}+\mathcal{L}_{\text{count.}}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_0)^2-\frac{1}{2}(m_0^2+\delta m_0^2)\phi_0^2-\frac{1}{8}\lambda_0(\phi_0^2)^2 \tag{8}$$

$$\phi_0=Z_\phi^{1/2}\phi, \qquad 1+A=Z_\phi, \tag{9}$$

$$m_0^2=Z_m m^2, \qquad \delta m_0^2=Z_\phi^{-1}\delta m^2, \qquad 1+B=Z_m Z_\phi, \tag{10}$$

$$\lambda_0=Z_\lambda\lambda, \qquad 1+C=Z_\lambda Z_\phi^2, \tag{11}$$

をとっているということを意味する。与えられた一つの質量の理論をくりこむ通常の場合と少し異なっている点は，裸の質量が $m_0^2+\delta m_0^2$ のように二つに分離しているところである。今の場合，m^2 は p^2 と同様な変数であり，(10) の示すように，m_0^2 は m^2 に比例する線形項，δm_0^2 は m^2 によらない定数項，に対応しているのである†。

以上のくりこみ手続きで，$\Gamma^{(2)}, \Gamma^{(4)}$ が，したがって任意の $\Gamma^{(n)}$ が，摂動の各次数ごとに，運動量 $\boldsymbol{p}$ と質量パラメータ m^2 の関数として有限関数にできることがわかった。このとき，対数発散項の相殺にあずかるくりこみ因子 Z_ϕ, Z_λ, Z_m は，それらのくりこみ条件 (3)～(5) が $m^2=\mu^2$ のところで与えられているので，(Λ を切断パラメータとして)

$$Z_i=Z_i(\lambda_0, \Lambda/\mu) \qquad i=\phi, \lambda, m \tag{12}$$

の形に決まる。これら Z_i が**変数としての**質量パラメータ m^2 に依存していないことが重要な点で，“質量によらないくりこみ”という名はここからきている。もう一つ注意しておくべき点は，裸の Lagrangian (8) に現れている (したがって裸の有効作用にも入っている) δm_0^2 が，μ にも m にも依存しない，という事実である：すなわち

$$\delta m_0^2=\Lambda^2 f(\lambda_0). \tag{13}$$

† Dirac フェルミオンの場合，同様に m に比例する部分 $m_0=Z_m m$ と定数部分 δm_0 に分けると，実は δm_0 は自動的に 0 となっている。これはカイラル対称性のせいで，くりこまれた質量 (tree レベル質量) が 0 だと裸の質量も 0 になるからである。スカラー理論の場合でも，次元正則化を用いれば，定数部分 δm_0^2 は自動的に 0 となる。

このことは，裸の n 点頂点関数 $\Gamma_0^{(n)}$ とくりこまれたそれ $\Gamma^{(n)}$ とが比例するという 7-2 (45) の関係式

$$\Gamma^{(n)}_{i_1\cdots i_n}(\boldsymbol{p}, m^2, \lambda\,;\,\mu^2) = Z_\phi^{n/2}\Gamma^{(n)}_{0\,i_1\cdots i_n}(\boldsymbol{p}, m_0^2, \delta m_0^2, \lambda_0;\ \Lambda^2) \tag{14}$$

を思い起こして，くりこみ条件 (2) を裸の $\Gamma_0^{(2)}$ で書き直せば

$$\Gamma^{(2)}_{0\,ij}(p^2=0, m_0^2=0, \delta m_0^2, \lambda_0\,;\,\Lambda^2) = 0 \tag{15}$$

となることから明らかである。実際，(15) は δm_0^2 を決める関係式であって，次元を持つ量として Λ^2 以外を含まず，その解は，(13) の形以外にはない。(13) の事実は，後に斉次くりこみ群方程式を導くときに重要となる。

(13) を得るために，質量によらないくりこみ法では，(2) のくりこみ条件は必ずおかねばならない不可欠の条件である。しかし，他の条件 (3) ～ (5) はいろいろバリエーションがあり得る：例えば，(3) や (5) を

$$\begin{aligned}&\Gamma^{(2)}_{ij}(p^2=\mu^2, m^2=\mu^2, \lambda;\ \mu^2)=0,\\&\Gamma^{(4)}_{i_1\cdots i_4}(\boldsymbol{p}, m^2=\mu^2, \lambda;\ \mu^2)\big|_{p_i\cdot p_j=\mu^2\delta_{ij}-\frac{1}{3}\mu^2(1-\delta_{ij})} = -\lambda\delta_{i_1\cdots i_4}\end{aligned} \tag{16}$$

などに置き換えてもよい。

ここで，'t Hooft により始められた次元正則化に基づく質量によらないくりこみ法に少しコメントしておく。この方法も本質的には上と同じなのであるが，ゲージ理論の場合，ゲージ不変性を尊重するという点で便利である。まず，n 次元においては，$\dim[\phi]=(n-2)/2$ であるから裸の結合定数 λ_0 が $(4-n)$ の次元を持つことに注意し，くりこまれた結合定数 λ，およびそのくりこみ定数 Z_λ が常に無次元になるように，(11) の $\lambda_0=Z_\lambda\lambda$ の代わりに

$$\lambda_0 = Z_\lambda\lambda\mu^{4-n} = (1+\hbar Z_\lambda^{(1)}+\hbar^2 Z_\lambda^{(2)}+\cdots)\lambda\mu^{4-n} \tag{17}$$

の形でくりこみを行う。μ は“くりこみ点”に相当する次元 1 のパラメータである。こうすれば，次元正則化による摂動計算において，結合定数はいつも $\lambda\mu^{4-n}$ の形で出，したがって loop 積分結果の $n=4$ の pole 近傍の展開に現れる対数関数は $\ln[(p^2+m^2)/\mu^2]$ のように常に正しく引数が無次元量となる。この方法では，次元を持つ切断パラメータ Λ を導入しないから，上述の $\Gamma^{(2)}$ の 2 次発散に対するくりこみ条件 (2) は自動的に満たされ（μ^2 は $n\to 4$ では対数の引数以外には出られない），よってあらわには言及されない。他の対数発散部分に対するくりこみは，(17) および $m_0^2=Z_m m^2$, $\phi_0=Z_\phi^{1/2}\phi$ として，例えば，上と同じく (3), (4), (5)（正確には (5) の

右辺の λ は $\lambda\mu^{4-n}$ に置き換える）のくりこみ条件を設定して行う[†]。そうすれば，次元を持たない $Z_i(i=\lambda, m, \phi)$ は，（Λ が存在しないから）μ にもあらわに依存できず，$Z_i(\lambda, n)=1+a_i^{(1)}(\lambda)/(n-4)+a_i^{(2)}(\lambda)/(n-4)^2+\cdots$ の形に決まり，明白に質量によらないくりこみとなる。このとき Z_i のくりこみ点 μ 依存性は，くりこまれた結合定数 λ を通じてのみ存在する。くりこまれた λ は，裸の λ_0 が μ に独立なので，(17) により μ 依存性が決まる。（この場合のくりこみ関係式，くりこみ群方程式は演習問題 8.1 参照。）

有効作用のくりこみ　上のくりこみによって，有効作用[††]

$$
\begin{aligned}
&\Gamma[\phi;\ m^2,\lambda;\ \mu^2] \\
&\quad=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\cdots\int\frac{d^4p_n}{(2\pi)^4} \\
&\qquad\times\Gamma_{i_1\cdots i_n}^{(n)}(\boldsymbol{p}, m^2, \lambda;\ \mu^2)(2\pi)^4\delta^4(\sum_j p_j)\phi_{i_1}(-p_1)\phi_{i_2}(-p_2)\cdots\phi_{i_n}(-p_n)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

の各係数としての n 点頂点関数 $\Gamma^{(n)}$ が，$\boldsymbol{p}$ と m^2 の有限な関数として計算されたわけである。展開 (18) は，$\phi_i=0$ の対称な真空のまわりの展開であるから，各 $\Gamma^{(n)}$ は対称な真空上の n 点頂点関数に対応している。しかしながら，上のくりこみ操作を，各 $\Gamma^{(n)}$ 個々の頂点関数のくりこみと考えないで，むしろ**有効作用 $\Gamma[\phi; m^2, \lambda; \mu^2]$ という 1 個の量に対するくりこみ**とみなすこともできる。この観点をとれば，Γ 自体は 4 次発散の量であり，それを次元 1 を持つ引(関)数 $\phi_i(p)$ で展開すれば発散が 1 次ずつ下がるから，$\Gamma^{(0)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma^{(4)}$ までが発散し，それぞれ 4 次，2 次，対数の発散量となり，（真空グラフ $\Gamma^{(0)}$ は今考慮していないから無視して）さらに $\Gamma^{(2)}, \Gamma^{(4)}$ を引数 m^2, p^2 で展開して，その初めの

$$
\Gamma^{(2)}\big|_{p^2=m^2=0},\quad \left.\frac{\partial\Gamma^{(2)}}{\partial m^2}\right|_{p^2=0,m^2=\mu^2},\quad \left.\frac{\partial\Gamma^{(2)}}{\partial p^2}\right|_{p^2=0,m^2=\mu^2},\quad \Gamma^{(4)}\big|_{p^2=0,m^2=\mu^2},
\tag{19}
$$

の四つの量のみが発散するので，これらの量に対して上の (2)～(5) のくりこみ条件で指定される引き算操作をやったのだと考えることができる。こう考える立場では，有効作用 Γ を ϕ_i の汎関数として（そしてもちろん m^2 の関数として）丸ごと有限にしたのであって，(18) のように対称な真空

---

† あるいは，くりこみ条件に言及しないで，単に $(n-4)^{-1}$ の pole 部分だけを引く。この処法を極小引き算（minimal subtraction）と呼ぶが，これは残りの有限部分が $\ln[(p^2+m^2)/\mu^2]$ の形をしていることから，外線運動量が $p^2\simeq\mu^2$ のスケールのところでくりこみを行ったことに相当している。

†† 今 ϕ の脚のない真空グラフは考慮していないので初項 $\Gamma^{(0)}$ は省いておく。

$\phi_i=0$ の上の n 点頂点関数 $\Gamma^{(n)}$ のそれぞれを有限にしたのではない，という点が重要なのである。すなわち，Γ を有限にすべく，その発散する ($\phi_i=0$ まわりの) 汎関数 Taylor 展開の初めの 4 項 (19) に対する引き算操作をしただけであって，決して，それ以降の項まで (18) のように Γ を $\phi_i=0$ まわりに Taylor 展開しているわけではない。このことは，通常の BPHZ くりこみにおいて，発散する Feynman 積分の被積分関数に対し，その外線運動量 $\boldsymbol{p}$ に関して Taylor 展開した初めの数項を引き算する手続きとちょうど同じことで，その場合も，決して被積分関数を $\boldsymbol{p}=0$ まわりに無限次まで展開したわけでなく，初めの数項を引いた残りの積分は，展開などしないで $\boldsymbol{p}$ の有限な関数となっていたのである。[実際に，BPHZ の Taylor 演算子 t^γ を拡張して，有効作用のような汎関数に直接かかる汎関数 Taylor 演算子を定義してこの引き算操作をあらわに書き下すこともできるが，今はその必要もないだろう。] それゆえ，(19) の 4 項を引き算することで，有効作用 Γ は，ϕ_i の有限な汎関数，m^2 の有限な関数となるのである。

このような，単に見方の違いに過ぎないような，「有効作用のくりこみ」という立場を強調するのは次の理由による。実際のところ，我々は，対称性が自発的に破れる場合，すなわち質量パラメータ m^2 がある負の値 $-M^2$ をとる場合に興味があるとしよう。その場合には，$\phi_i=0$ の対称な真空は不安定であって，Feynman 伝播関数にタキオン pole† が出てくるので，(18) の $\phi_i=0$ まわりの展開で与えられるその真空上の n 点関数 $\Gamma^{(n)}$ は well-defined な量でなくなっている††。しかし，我々の有効作用 $\Gamma[\phi;m^2,\lambda;\mu^2]$ 自体は，m^2 が負の領域でも well-defined なのである。$m^2=-M^2<0$ の場合は，まず，有効作用 Γ の引数 $\phi_i(x)$ を定数 ϕ_i (運動量表示の $\phi_i(p)=\int d^4x e^{ipx}\phi_i(x)$ なら定数 ϕ_i の $(2\pi)^4\delta^4(p)$ 倍) において得られる有効ポテンシャル

$$V(\phi_i,-M^2,\lambda\,;\,\mu^2)=-\Gamma[\phi_i(x)=\phi_i;\,-M^2,\lambda;\,\mu^2]\Big/\int d^4x \qquad (20)$$

の停留条件 $\partial V/\partial\phi_i=0$ を満たす安定な真空解 $\phi_i=v_i$ を求める。次に有効作用 Γ を $\phi_i(p)=v_i(2\pi)^4\delta^4(p)$ のまわりで汎関数 Taylor 展開すれば，

---

† $p^2<0$ の領域での pole。

†† すなわち，Feynman 積分でそのタキオン pole をどう避けるかが指定されていない。

$$
\begin{aligned}
&\Gamma[\phi\,;\,-M^2,\lambda\,;\,\mu^2] \\
&\quad=\sum_n\frac{1}{n!}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\cdots\int\frac{d^4p_n}{(2\pi)^4}\Gamma^{(n)}_{v,i_1\cdots i_n}(\boldsymbol{p},-M^2,\lambda;\,\mu^2) \\
&\qquad\qquad\times(2\pi)^4\delta^4(\sum_j p_j)\tilde{\phi}_{i_1}(-p_1)\cdots\tilde{\phi}_{i_n}(-p_n)
\end{aligned} \tag{21}
$$

$$
\tilde{\phi}_i(p)\equiv\phi_i(p)-v_i(2\pi)^4\delta^4(p),
$$

係数 $\Gamma^{(n)}_v$ が，その安定な真空 $\langle\phi_i(x)\rangle=v_i$ 上の n 点頂点関数を与える。このとき，もちろん，$\phi_i=v_i$ の真空上にはタキオンがなく，$\Gamma^{(n)}_v$ は well-defined なのである。

我々のこの手続きでは，(20) の有効ポテンシャル V も (21) の有効作用 Γ も既に有限になっている量で，m^2 を負にとったからといって新たにくりこみをやり直す必要はないのである。すなわち，$m^2=-M^2<0$ の自発的対称性の破れの起こっている理論を，“対称な理論の相殺項” でくりこんだわけである。なぜなら，我々の用いた有効作用に対する引き算項は，(19) に与えた 4 項で，それらは質量パラメータ m^2 が 0 または $\mu^2>0$ の対称な理論の相殺項†だからである。このような，有効作用のくりこみという観点に立ち，質量によらないくりこみ処法を用いて，対称性が自発的に破れている理論を，対称な理論の相殺項でくりこむ方法を，質量によらない対称なくりこみ (symmetric mass-independent renormalization)，略して SMI くりこみ，と呼ぶ。

以上のことから，前節のゲージ理論のスカラー場の部分に，この SMI くりこみを適用すれば，対称性が自発的に破れ Higgs 現象が起こっている場合にもくりこみ可能なことが，対称な場合のくりこみ可能性から従うことが理解されたであろう。

ゲージ場の質量項による赤外正則化　ここで少し話題が異なるが，質量によらないくりこみ法の一つの応用として，ゲージ場の質量項 $(1/2)m^2A_\mu^2$ を手で加えることによって対称性の自発的破れのないゲージ理論における赤外発散を正則化する方法について少し考察しておこう。赤外発散とは，例えば QCD において，零質量のグルーオン (ゲージ場) のみがまわる loop グラフの loop 積分 $\int d^4l/(2\pi)^4$ で，被積分関数が l に関して -4 次以下であれば，外線運動量をすべて 0 にしたとき，赤外側 ($l=0$) で積分が発散す

† もう少し正確には，対称な理論のくりこみ因子 Z というべきである。実際の相殺項は $Z_m m^2\phi^2$ のようにあらわに m^2 に依存している。

るという問題である。したがって，これは外線運動量 $\boldsymbol{p}=0$ のまわりでの Taylor 演算で紫外発散を引くというもともとの BPHZ の手続きをゲージ理論に適用しようとするときにも起こる問題で，零質量粒子のみから成る loop グラフの対数発散項は赤外でも発散しており，もとの BPHZ 手続きが使えなくなる。もちろん，外線運動量 $\boldsymbol{p}$ を 0 以外の点におけば問題はないのだが，$\boldsymbol{p}$ が Lorentz スカラーでないので $\boldsymbol{p}=0$ 以外の点を選ぶと計算がかなり面倒になる。そこで，ゲージ場に手で質量 $m\neq 0$ を与え，$\boldsymbol{p}=0$ としても赤外発散が出ないようにしようというのがこの正則化である。もちろん，欲しいのは $m=0$ の理論であるが，まずゲージ場が一般の質量 m を持つ場合に枠を広げてから質量によらないくりこみ法を適用して，m^2 があるくりこみ点 $\mu^2(>0)$ のところでの (したがって $\boldsymbol{p}=0$ でも赤外発散のない) 相殺項によって，任意の m の理論をすべて有限にするのである。

前節のゲージ理論の BRS 不変な Lagrangian に，ゲージ場の質量項 $(1/2)m^2A_\mu^2$ を付け加えても，(他の次元 2 のスカラー場質量項が少し変更を受ける点以外は) そのままくりこみ可能であることは，**7-3** の命題 1 および Symanzik の定理からほぼ明らかであろう。しかし，今の場合，線形でない BRS 対称性を破る項を入れる点や，対数発散の相殺項はすべて BRS 不変でない $m^2=\mu^2$ の理論のものを用いる点から若干不安を憶えるかもしれないので，念のため，前節の WT 恒等式を用いた議論を質量項 $(1/2)m^2A_\mu^2$ のある場合に拡張してこのことを直接証明しておこう。

まず，ゲージ場の質量項がある場合の WT 恒等式を導く。前節の BRS 不変な作用積分 S，**7-4** (9)，に質量項とその BRS 変換の外場項を加えた

$$I=S+\int d^4x\left[\frac{1}{2}m^2A_\mu^2+M\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\left(\frac{1}{2}A_\mu^2\right)\right] \tag{22}$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\left(\frac{1}{2}A_\mu^2\right)=A_\mu^a D^\mu c^a=A_\mu^a\partial^\mu c^a \qquad (\because \quad A_\mu^a(A_\mu\times c)^a=0) \tag{23}$$

の I が今の系の作用積分である。外場 M は次元 1，ゴースト数 $N_{\mathrm{FP}}=-1$ である。この系の有効作用 Γ に対する WT 恒等式は，**5-6** での導き方をくり返せば，容易に

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_I}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_I}+\frac{\delta\Gamma}{\delta c^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_c^a}+i\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a}B^a=m^2\frac{\delta\Gamma}{\delta M} \tag{24}$$

となることがわかる†。他の NL 場および反ゴースト場の運動方程式から

† 演習問題 7.3.

従う恒等式，**7-4** (12),(13) は変更を受けないから，**7-4** (27) のように NL 場 B^a に依存するゲージ固定項部分 $\int d^4x[B^a f_I^a \phi_I + \frac{1}{2}\alpha B^a B^a]$ を引いた有効作用 $\tilde{\Gamma}$（および作用 $\tilde{I}$）を定義でき，その反ゴースト場依存性は，**7-4** (28) の $\tilde{K}_I$ を用いればなくなる。そうすれば，$\tilde{\Gamma}$ に対する恒等式 (24) は，**7-4** (31) の $*$ 演算を用いて

$$\tilde{\Gamma} * \tilde{\Gamma} = m^2 \frac{\delta \tilde{\Gamma}}{\delta M} \tag{25}$$

と書き直される。

WT 恒等式 (25) は，初め裸の量 $\phi_{0I}, \tilde{K}_{0I}, m_0^2, M_0$ 等で書かれているものであるから，前節同様くりこんでも同じ形になるよう，$\phi_{0I}, \tilde{K}_{0I}$ のくりこみ **7-4** (15),(18) を考慮して，m_0^2, M_0 のくりこみを

$$m_0^2 = Z_m^A m^2, \qquad M_0 = Z_m^A Z_3^{1/2} \tilde{Z}_3^{1/2} M \tag{26}$$

で行う。そうすれば，(25) はくりこんだ量 $\phi_I, \tilde{K}_I, c^a, K_c^a, m^2, M$ で書かれた恒等式とみなすことができる。今，ゲージ場の 2 乗質量 m^2 に関しては，質量によらないくりこみをしているが，(26) の第 1 式 $m_0^2 = Z_m^A m^2$ で暗に，ゲージ場の裸の質量は m^2 に比例する部分しかないことをいっている点に注意しておこう。これはゲージ (BRS) 対称性により，$m^2=0$ なら裸の質量も 0 であることが保証されているからである。

前節と同じ数学的帰納法により，$\hbar^n$ のオーダーまで有限にくりこまれたとすると，$\hbar^{n+1}$ のオーダーで現れる発散 $\Gamma_{\text{div.}}^{(n+1)}$ は，WT 恒等式 (25) より $\tilde{I} * \Gamma_{\text{div.}}^{(n+1)} = m^2 \delta \Gamma_{\text{div.}}^{(n+1)} / \delta M$ を満たすことが従う。それゆえ，今度は

$$\tilde{I} * X = m^2 \frac{\delta X}{\delta M} \tag{27}$$

なるくりこみ方程式の解 X の一般形を求めればよいことになる。そこで，まず，X は次元 4 以下であるから m^2 の高々 1 次関数で

$$X = X_0 + m^2 X_1 \tag{28}$$

と書いてよい†。(22) の作用積分 I でも m^2 依存項を分離して

$$\tilde{I} = \tilde{I}_0 + m^2 \tilde{I}_1 \tag{29}$$

$$\tilde{I}_0 \equiv \tilde{S} + \int d^4x [M A_\mu^a \partial^\mu c^a], \qquad \tilde{I}_1 \equiv \int d^4x \left[\frac{1}{2} A_\mu^2\right] \tag{30}$$

と書き，(28),(29) を (27) に代入して m^2 の各べきを等置すれば，

† m^4 の項は場によらないので，真空グラフを議論しない今は落としてよい。

$$\tilde{I}_0 * X_0 = 0, \tag{31}$$

$$\tilde{I}_1 * X_0 - \frac{\delta X_0}{\delta M} = -\tilde{I}_0 * X_1 \tag{32}$$

$$\tilde{I}_1 * X_1 - \frac{\delta X_1}{\delta M} = 0 \tag{33}$$

を得る。これを(33),(32),(31)の順に解くことにする。

まず，X_1 は(28)より次元2の量であるから，大局的ゲージ不変性およびゴースト数 $N_{\rm FP}=0$ の要求を考慮すると，その一般形が次式で与えられることがわかる：

$$X_1 = \int d^4x \left[\frac{1}{2} a A_\mu^2 - b|\varphi|^2\right] \qquad (a, b ; \text{定数}) \tag{34}$$

ゲージ群が $U(1)$ の(あるいは $U(1)$ 因子群を含む)場合は，Mc^a の項も要求を満たすように思えるが，$\mathcal{CPT}$ 不変性 $[c(x) \to -c(-x),\ M(x) \to M(-x)]$ から排除される†。一方，(30)の $\tilde{I}_1$ の形と $*$ 演算の定義 **7-4** (31)とから

$$\tilde{I}_1 * {}^\forall X = A_\mu^a \frac{\delta X}{\delta \tilde{K}_\mu^a} \tag{35}$$

であることに注意すれば，(34)の X_1 は任意の係数 a, b で(33)の方程式を満たすことがわかる。

次に，この(34)の X_1 を代入すれば，(32)の方程式は，(35),(23)を用い

$$\left(A_\mu^a \frac{\delta}{\delta \tilde{K}_\mu^a} - \frac{\delta}{\delta M}\right) X_0 = -a A_\mu^a \partial^\mu c^a \tag{36}$$

となる。この方程式の特解は $X_0 = aMA_\mu^a \partial^\mu c^a$ であり，右辺を0とした斉次方程式の一般解は，M 依存性が

$$\tilde{\tilde{K}}_\mu^a \equiv \tilde{K}_\mu^a + MA_\mu^a \tag{37}$$

を通じてのみである任意関数 $\tilde{X}_0[\phi_I, c^a, \tilde{\tilde{K}}_\mu^a, \tilde{K}_i, K_c^a]$ であるから，(36)の一般解 X_0 は次式で与えられる：

$$X_0 = \tilde{X}_0 + \int d^4x [aMA_\mu^a \partial^\mu c^a]. \tag{38}$$

すなわち，以後変数として，$\phi_I, c^a, \tilde{K}_i, K_c^a$ の他，$\tilde{\tilde{K}}_\mu^a$ と M を用いることにすれば，$\tilde{X}_0$ は M に依存しない汎関数である。

最後に，方程式(31)は，(38)の X_0 を代入し，$\tilde{I}_0$ の表式(30)を用いると

---

† $\mathcal{C}$ や $\mathcal{CP}$ が系の不変性としてあるならそれでもよい。たとえこの段階で排除しなくとも Mc^a の項は(33)の方程式を満たさないからどのみち落ちる。

$$\tilde{S}*\tilde{X}_0+M[\partial^\mu c^a(\delta/\delta\tilde{\tilde{K}}{}^a_\mu)-A^a_\mu\partial^\mu(\delta/\delta K^a_c)]\tilde{X}_0=0 \tag{39}$$

となる。ただし，$\tilde{S}*(MA^a_\mu\partial^\mu c^a)=\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}(MA^a_\mu D^\mu c^a)=0$，$(MA^a_\mu\partial^\mu c^a)*(MA^b_\nu\partial^\nu c^b)=0$ を使った。(39) の第 1 項は M に依存しないから，第 1 項，第 2 項は別々に 0 とならねばならない。第 1 項＝0 の方程式 $\tilde{S}*\tilde{X}_0=0$ は前節で一般に解いたものに他ならない。その一般解の形 **7-4** (63) を見れば，今 $\tilde{K}^a_\mu$ の代わりに $\tilde{\tilde{K}}{}^a_\mu$ の変数を用いていることに注意して，その $\tilde{\tilde{K}}{}^a_\mu$，$K^a_c$ 依存部分が

$$\tilde{\tilde{K}}{}^a_\mu[\gamma_A\partial^\mu c^a+\beta_A g(A_\mu\times c)^a]+K^a_c\left[\beta_A\left(-\frac{1}{2}g\right)(c\times c)^a\right] \tag{40}$$

で与えられていることがわかる。ところが，この形 (40) は，$(\partial^\mu c^a)(\partial_\mu c^a)=0$ を使うと，(39) の第 2 項＝0 の条件が自動的に満たされていることを示している。それゆえ，(39) の一般解 $\tilde{X}_0$ は，前節の一般解で $\tilde{K}^a_\mu\ \to\ \tilde{\tilde{K}}{}^a_\mu=\tilde{K}^a_\mu+MA^a_\mu$ の置き換えをしたもので与えられ，したがって，その MA^a_μ のずれの部分と，(34)，(38) を考慮すれば，結局，(27) の方程式の一般解 (28) が

$$X=[\text{前節の解}]+\int d^4x\left[(a+\gamma_A)MA^a_\mu\partial^\mu c^a+\frac{1}{2}am^2A^2_\mu-bm^2|\varphi|^2\right] \tag{41}$$

となることがわかる。$[A^a_\mu(A^\mu\times c)^a=0$ に注意。$]$

(41) の第 1 項の [前節の解] の部分は，既に BRS 不変な作用 $\tilde{S}$ の Z 因子や v_i をずらせて得られる相殺項で相殺できることを知っている。今の作用積分 I，(22)，で新たに加わっている部分 $I-S$ で，(26) のくりこみを行えば，

$$\int d^4x\left[\frac{1}{2}Z^A_m Z_3 m^2 A^2_\mu+Z^A_m Z_3\tilde{Z}_3 MA^a_\mu\partial^\mu c^a\right] \tag{42}$$

となるから，Z 因子をずらすことによりこの部分から出る相殺項は

$$\int d^4x\left[\frac{1}{2}(\delta Z^A_m+\delta Z_3)m^2A^2_\mu+(\delta Z^A_m+\delta Z_3+\delta\tilde{Z}_3)MA^a_\mu\partial^\mu c^a\right]. \tag{43}$$

ところが，**7-4** (76) で既に決まっている δZ_3，$\delta\tilde{Z}_3$ の値，$-(\alpha_A+2\beta_A-2\gamma_A)$，$-\gamma_A$ を代入すれば，ゲージ場質量のくりこみ因子を

$$\delta Z^A_m=-a+(\alpha_A+2\beta_A-2\gamma_A) \tag{44}$$

ととったとき，(43) の二つの相殺項がちょうど (41) の第 2 項中の第 1・第 2 項を相殺することがわかる。

(41) の最後の項 $-bm^2|\varphi|^2$ に関しては，前節の μ^2 に比例する発散項

$-\alpha_m\mu^2|\varphi|^2$ と共に，スカラー場 φ_i の裸の質量項を

$$-(Z_{m1}\mu^2+Z_{m2}m^2)Z_i|\varphi|^2 \tag{45}$$

$$Z_{m1}=1+\hbar Z_{m1}^{(1)}+\hbar^2 Z_{m1}^{(2)}+\cdots,\qquad Z_{m2}=0+\hbar Z_{m2}^{(1)}+\hbar^2 Z_{m2}^{(2)}+\cdots,$$

のように，μ^2 と m^2 に比例する二つの部分に分離しておけば，両者の相殺項を用意できる。[この考察で，m^2 にも μ^2 に比例しない定数項 $\delta\mu^2$ の発散が現れてこないのは，m^2 や μ^2 以外に次元を持った量を考えなかったためで，次元正則化を採用していることに相当している。]

以上で，結局，ゲージ場の質量項を加えても，スカラー場の質量項が少しの変更を受けるだけで，ゲージ理論がくりこみ可能にとどまるという予想を証明することができた。しかし最後に注意しておきたいのは，これはあくまで単に赤外正則化の方法であるということである。なぜなら，ゲージ場の質量パラメータ m^2 が 0 でない理論は，有限にはなるが，BRS 不変性を持たず，したがって BRS 電荷 Q_B は保存しないし，べき零でもないから，物理的解釈のできる理論とはならないからである。有限になったすべての m^2 の値の理論の中で，$m^2=0$ とおいた理論だけが，ユニタリーな物理的意味のある理論なのである。

演習問題 7.

7.1 QED において，電磁カレント演算子 $j^\mu(x)(\equiv-\bar\psi\gamma^\mu\psi)$ の，レプトン l (電子または μ 粒子) 状態における行列要素は一般に次の形で与えられる：

$$\langle l(p_f)|j^\mu(x)|l(p_i)\rangle$$
$$=-\bar u(\boldsymbol{p}_f,s_f)[\gamma^\mu F_1(q^2)+i\sigma^{\mu\nu}q_\nu F_2(q^2)/2m]u(\boldsymbol{p}_i,s_i)e^{iqx}\qquad(q\equiv p_f-p_i).$$

1) レプトン $|l\rangle$ の電荷 $Q=\int d^3x\, j^{\mu=0}(x)$ が -1 であること，$Q|l\rangle=-1|l\rangle$，から $F_1(q^2=0)=1$ を導け。(ただし，$|l(p)\rangle$ は不変規格化された状態で，$\bar u(\boldsymbol{p},s)u(\boldsymbol{p},s')=2m\delta_{ss'}$ である。)

2) 外場 $A_\mu^{\rm ext}(x)$ との相互作用 Hamiltonian は $H_{\rm int}=+e\int d^3x\, j^\mu(x)A_\mu^{\rm ext}(x)$ で与えられる。このレプトンに (静止系で) 外部から一様な静磁場 $\boldsymbol{H}$ ($\boldsymbol{A}^{\rm ext}=(1/2)\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{x}$) を掛けると，$-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{H}$ の相互作用エネルギーを得る。この磁気能率 $\boldsymbol{\mu}$ を，F_1, F_2 を用いて表せ。

3) QED で e の 3 次までの精度で，レプトンの磁気能率 $\boldsymbol{\mu}$ を計算せよ。

7.2 7-4 (31) で定義した＊演算に対して，Jacobi 恒等式 7-4 (33) が成立することを確かめよ。また，古典的作用積分 7-4 (9) からゲージ固定部分 $\int d^4x\,\mathcal{L}_{\rm GF}$

を除いた $\tilde{S}$ に対して，その BRS 不変性が $\tilde{S}*\tilde{S}=0$ を意味することおよび $\tilde{S}*$演算のベキ零性 **7-4** (45) を証明せよ。

7.3　ゲージ場のあらわな質量項およびその BRS 変換外場項，$(1/2)m^2A_\mu^2+M\delta_B[(1/2)A_\mu^2]$ が存在する場合の，有効作用 Γ に対する WT 恒等式 **7-5** (24) を導け。

7.4　物質場としてフェルミオン ψ を含むゲージ理論の系 **7-4** (1) を考える。裸の量を一般に添字 0 を付けて表し，

$$A_{0\mu}^a=Z_3^{1/2}A_\mu^a,\qquad (c_0^a,\ \bar{c}_0^a)=\tilde{Z}_3^{1/2}(c^a,\ \bar{c}^a),\qquad (\psi_0,\ \bar{\psi}_0)=Z_2^{1/2}(\psi,\ \bar{\psi})$$

でくりこまれた場を定義する。各相互作用項のくりこみを

$$\mathcal{L}_{A^3}=-\frac{1}{2}g_0f_{abc}(\partial_\mu A_{0\nu}^a-\partial_\nu A_{0\mu}^a)A_0^{b\mu}A_0^{c\nu}=-\frac{1}{2}Z_1gf_{abc}(\partial_\mu A_\nu^a-\partial_\nu A_\mu^a)A^{b\mu}A^{c\nu},$$

$$\mathcal{L}_{A^4}=-\frac{1}{4}g_0^2(f_{abc}A_{0\mu}^bA_{0\nu}^c)^2=-\frac{1}{4}Z_4g^2(f_{abc}A_\mu^bA_\nu^c)^2,$$

$$\mathcal{L}_{\bar{c}cA}=ig_0f_{abc}\bar{c}_0^a\partial^\mu(A_{0\mu}^bc_0^c)=i\tilde{Z}_1gf_{abc}\bar{c}^a\partial^\mu(A_\mu^bc^c),$$

$$\mathcal{L}_{\bar{\psi}\psi A}=g_0\bar{\psi}_0\gamma^\mu T^a\psi_0A_{0\mu}^a=Z_1^\psi g\bar{\psi}\gamma^\mu T^a\psi A_\mu^a,$$

と書いたとき，$Z_1, Z_4, \tilde{Z}_1, Z_1^\psi$ をそれぞれ $A^3, A^4, \bar{c}cA, \bar{\psi}\psi A$ 頂点のくりこみ因子と呼ぶ。これら頂点くりこみ因子 $Z_V(\equiv Z_1, Z_4, \tilde{Z}_1, Z_1^\psi)$ は，もちろん 1 と (Z_V-1) とにわけて，(Z_V-1) の部分を相殺項として用い，各頂点関数が有限になるように決められる。このとき **7-4** のくりこみ一般論が

$$Z_1/Z_3=Z_4/Z_1=\tilde{Z}_1/\tilde{Z}_3=Z_1^\psi/Z_2$$

の関係式を意味していることを示せ。この関係式は Slavnov-Taylor 恒等式と呼ばれる。

8. くりこみ群と演算子積展開

8-1　複合演算子のくりこみと演算子積展開

場の理論の種々な現象論的応用において，しばしば，場の局所的演算子(一般に複合演算子) $A(x), B(y)$ の積 $A(x)B(y)$ が，2点 x, y が同一点 $(x=y)$[あるいは光円錐 $((x-y)^2=0)$] 近傍に近づいたとき，どのように振舞うかを知る必要が生ずる。Wilson (ウイルソン) は，この問題に対して直観的に，局所演算子のある種の完全系 $\{O_i(x)\}$ が存在して，一般に

$$A(x)B(y) \underset{x\to y}{\sim} \sum_i C_i(x-y)\,O_i\!\left(\frac{x+y}{2}\right) \qquad (C_i : c\ \text{数関数}) \qquad (1)$$

なる展開ができる，ということを主張し，その意味と応用とを議論した。Wilson 自身は，この展開式 (1) を必ずしも摂動論の枠内に限らないで成立する一般的な演算子間の等式として提唱したもので，今日 (1) は Wilson の演算子積展開 (operator product expansion)，略して OPE と呼ばれている。演算子 A, B, O_i の次元を d_A, d_B, d_i と呼ぶと，係数はおおよそ $C_i(x) \underset{x\to 0}{\sim} (1/x)^{d_A+d_B-d_i}$ と振舞うので，短距離 $x\simeq y$ 極限では，(1) の展開の無限項のうち次元 d_i の低い初めの方の項だけが支配的になる。したがって実用上は初めの数項だけを分析すれば充分ということになるのである。

摂動論の枠内で，はじめて (1) の展開式を厳密に証明したのは Zimmermann である。この節では，彼に従って，摂動論において (1) の展開式を導く。以下では，簡単のためもっぱら $\lambda\phi^4$ 理論で話をするが，他の場合でも本質的に同様である。

複合演算子の定義　(1) の右辺の展開に現れる演算子 O_i は一般に $\phi^n(x)$, $\phi^n(x)\,\partial_\mu\phi(x)$ などのような場の同一時空点の積であって，局所演算子積

(local operator product) または簡単に複合演算子 (composite operator) と呼ばれるものである。こういう局所積は，場の理論では特異性を持っているので，そのままでは well-defined な量ではなく，(1) の OPE を証明するにはまず，そのような局所積をちゃんと定義することから始めなければならない。

複合演算子 O を直接演算子として定義する代わりに，Zimmermann に従い，**正規積** (normal product) と呼ばれる演算子 $[O]_d$ ($N_d(O)$ とも記される) を，機能的に定義する。すなわち，$[O]_d$ を含むすべての Green 関数を定義することによって，逆に演算子 $[O]_d$ を定義するのである。O は，$\phi^2, \partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi, \phi\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi$ などのように一般に場 ϕ とその微分から構成される単項式で，$O=O(\phi)$ を含む“裸”の Green 関数は，

$$
\begin{aligned}
G_O^{(n)} &\equiv \langle \mathrm{T}\; O(\phi)\,\phi(x_1)\,\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle \\
&\equiv \int \mathcal{D}\phi\; O(\phi)\,\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\,\exp\left[i\int d^4x\,\mathcal{L}\right] \qquad (2)
\end{aligned}
$$

で定義される。ただし，この Lagrangian $\mathcal{L}$ は相殺項なしの，有限な

$$
\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi-\mu^2\phi^2)-\frac{\lambda}{4!}\phi^4 \qquad (3)
$$

で，BPHZ の枠内で有効 (effective) Lagrangian と呼ばれるものである。乗法的くりこみのやり方の場合の相殺項に相当するものは，(3) の $\mathcal{L}$ にあらわに加えることなしに，BPHZ の Taylor 演算 $(-t^\gamma)$ で機能的に行うことにするからである†。もう一つ，**4** 章でも述べたように，(2) で定義される T 積は T* 積の意味である。この節で使う T はすべてこの意味の T* 積を表すことに注意しておく。これから，この Green 関数 $G_O^{(n)}$ を議論する代わりに，その 1 粒子既約 (1PI) なグラフのみの寄与で，かつ x_1 ～ x_n の各脚から出る伝播関数 Δ_F をもいで得られる頂点関数 $\Gamma_O^{(n)}$ を議論しよう：

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathrm{T}\,O(\phi)\,\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle^{\mathrm{1PI}} \\
&\quad=\left[\prod_{i=1}^{n}\int dy_i\,\Delta_F(x_i-y_i)\right]\Gamma_O^{(n)}(y_1,\cdots,y_n) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

この $\Gamma_O^{(n)}$ は，**5-6** でやったように，まず，ϕ と O の外場 J, K を導入して

$$
\exp iW[J,K]=\int\mathcal{D}\phi\,\exp i\int d^4x\,[\mathcal{L}+J\phi+KO(\phi)] \qquad (5)
$$

† Taylor 演算 $(-t^\gamma)$ で自動的に満たされる“$p=0$ でのくりこみ条件”以外のくりこみ条件を設定したいときは，(3) の $\mathcal{L}$ にさらに**有限係数**の ($\hbar$ のべき級数を係数とする) 相殺項を加えたものを有効 Lagrangian とすればよい。

で生成汎関数 $W[J, K]$ を定義し，それを J についてのみ Legendre 変換をして $\Gamma[\varphi, K] \equiv W[J, K] - \int dx\, J\varphi$ を定義すれば，

$$\Gamma_{O(x)}^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = \left.\frac{\delta^{n+1}\Gamma[\varphi, K]}{\delta K(x)\,\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_n)}\right|_{\varphi=K=0} \qquad (6)$$

としても得られる量である。$\Gamma_O^{(n)}$ を O の挿入された頂点関数 (O-inserted vertex function) と呼ぼう。

さて，問題の正規積 $[O]_d$ の頂点関数 $\Gamma_{[O]_d}^{(n)}$ は，$\Gamma_O^{(n)}$ に効くグラフ G の各々に対して，その Feynman 被積分関数 $I_G(\Gamma_O^{(n)})$ を，R-演算を施した

$$R_G(\Gamma_{[O]_d}^{(n)}) = \sum_{U \in \mathscr{F}(G)} \left[\prod_{\gamma \in U}(-t^\gamma)\right] I_G(\Gamma_O^{(n)}) \qquad (7)$$

に置き換えて得られる量として定義する。ただし，このとき，グラフ G のくりこみ部分 γ としては，O 頂点を囲むものも含み，その場合演算子 $[O]_d$ は，実際の次元 (例えば $O = \partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi$ なら 4) にかかわらず，次元 d を持つ演算子とみなす。すなわち，$[O]_d$ 頂点には指標 $d-4$ を付与し，見かけ上の発散次数の公式 **7-3** (7) に従い，$[O]_d$ 頂点を含む部分グラフ γ は

$$\omega(\gamma) = 4 - n_\gamma + (d-4) = d - n_\gamma \geqq 0 \qquad (n_\gamma : \gamma \text{ の外線数}) \qquad (8)$$

のときくりこみ部分とみなし，t^γ は $\omega(\gamma)$ 次の Taylor 演算子とする。

このようにして得られる $\Gamma_{[O]_d}^{(n)}$ は，d が O の本当の次元 d_O 以上であれば有限な well-defined なものとなる。なぜなら，(5) のように書けば，$\mathcal{L} + KO(\phi)$ 全体を系の有効 Lagrangian とみなすことができ，その場合 O 頂点を含むグラフも普通のグラフであって，普通の BPHZ 手続きで有限になっている (**7-3** の収束定理)。もちろん，そのときには，O 頂点を囲む部分グラフの見かけ上の発散は O の本当の次元 d_O を勘定しており，t^γ もそれに応じたものであるから，こう考えて得られる量は $d = d_O$ とした正規積 $[O]_{d_O}$ の場合の頂点関数 $\Gamma_{[O]_{d_O}}^{(n)}$ である。$d > d_O$ の $[O]_d$ の場合は，必要以上に引き算をやることを意味するが，ともかく有限である。$d > d_O$ の場合の正規積 $[O]_d$ を，引き過ぎ演算子 (oversubtracted operator) と呼び，$d = d_O$ の正しい次元を付与した正規積を通常の正規積と呼ぼう。

引き過ぎ演算子 $[O]_d$ ($d > d_O$) は，実は，必ず次元が d 以下の通常の正規積演算子 $[O']_{d_{O'}}$ の線形和に書き表すことができる。これを $[\phi^2]_4$ を例にとって説明しよう。この場合，示すべきは，α, β, γ を定数として

$$[\phi^2]_4 = [\phi^2]_2 + \alpha[\phi^4]_4 + \beta[\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi]_4 + \gamma[\phi\Box\phi]_4 \qquad (9)$$

の式である。一般に $[O]_d$ と同じ形の $[O]_{d_O}$ は係数 1 で現れ，混じる他の

演算子 O' はすべて O と同じ Lorentz 変換性および内部対称性を持つ。

定義 (7) により，$\Gamma^{(n)}_{[\phi^2]_4}$ は，ϕ^2 頂点を次元 4 とみなした Taylor 演算子を $t^{\gamma}_{(4)}$ と記すと

$$R_G(\Gamma^{(n)}_{[\phi^2]_4}) = \sum_{U\in\mathcal{F}(G)}\left[\prod_{\gamma\in U}(-t^{\gamma}_{(4)})\right]I_G(\Gamma^{(n)}_{\phi^2}) \tag{10}$$

の積分で与えられる。もちろん，くりこみ部分 γ が ϕ^2 頂点を囲まないものなら $t^{\gamma}_{(4)}$ は通常の t^{γ} である。ϕ^2 頂点を含む γ に対して，$t^{\gamma}_{(4)}$ は，ϕ^2 に正しい次元 2 を付与する通常の $t^{\gamma}=t^{\gamma}_{(2)}$ より 2 次だけよけいにとり出すから

$$t^{\gamma}_{(4)} = t^{\gamma}_{(2)} + \hat{t}^{\gamma} \tag{11}$$

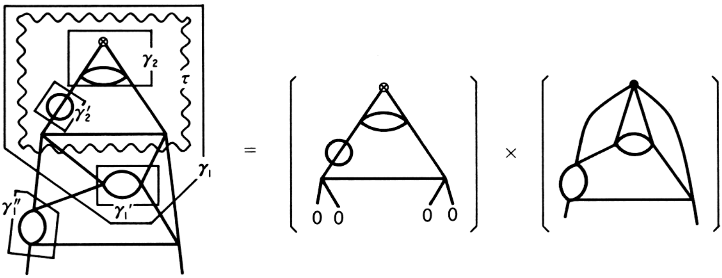
と書く。一般に，順序づけられた積 $\prod_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\equiv(x_n+y_n)(x_{n-1}+y_{n-1})\cdots(x_1+y_1)$ に対して，その展開の各単項式中に含まれる y_i のうち最小添字を持つものに注目すれば

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}(x_i+y_i) &= \prod_{i=1}^{n}x_i + y_n\prod_{i=1}^{n-1}x_i + (x_n+y_n)\,y_{n-1}\prod_{i=1}^{n-2}x_i \\ &\quad + (x_n+y_n)(x_{n-1}+y_{n-1})y_{n-2}\prod_{i=1}^{n-3}x_i + \cdots + \left[\prod_{i=2}^{n}(x_i+y_i)\right]y_1\end{aligned} \tag{12}$$

の形の等式が成立することがわかる。(10) 中の G の森 U のそれぞれの中で，ϕ^2 頂点を含むくりこみ部分 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ は小さいものから大きいものへ右から左へ順に並んでおり，対応する $\prod_{i=1}^{n}(-t^{\gamma_i}_{(4)})=\prod_{i=1}^{n}(-t^{\gamma_i}_{(2)}-\hat{t}^{\gamma_i})$ に対して (12) の形の等式を適用すれば，(10) の Taylor 演算子の積のあらゆる可能な森 U にわたる和が次のように書き直せることは明らかであろう：

$$\begin{aligned}\sum_{U\in\mathcal{F}(G)}\prod_{\gamma\in U}(-t^{\gamma}_{(4)}) &= \sum_{U\in\mathcal{F}(G)}\prod_{\gamma\in U}(-t^{\gamma}_{(2)}) \\ &\quad + \sum_{\tau\in T}\Bigl(\sum_{U_1\in\mathcal{F}(G/\tau)}\prod_{\gamma\in U_1}(-t^{\gamma}_{(4)})\Bigr)(-\hat{t}^{\tau})\Bigl(\sum_{U_2\in\mathcal{F}(\tau)}\prod_{\gamma\in U_2}(-t^{\gamma}_{(2)})\Bigr).\end{aligned} \tag{13}$$

ただし，T はグラフ G の ϕ^2 頂点を含むくりこみ部分 τ すべての集合で，$\mathcal{F}(G/\tau)$ は，τ を 1 点につぶしたグラフ G/τ のあらゆる森 U_1 の集合，$\mathcal{F}(\tau)$ はあらゆる τ 森の集合である。(12) からは，もともと U_2 がグラフ τ の正規な森 (τ 自身を元として含まない) に限られた式が出るのだが，満杯の森の場合に必ず含まれる $t^{\tau}_{(2)}$ は τ の外線運動量の $\omega(\tau)=2-n_{\tau}$ 次以下の多項式を与えるので，$4-n_{\tau}$ 次項を取り出す $(-\hat{t}^{\tau})$ 演算子の後ろでは効かず ($\hat{t}^{\tau}t^{\tau}_{(2)}=0$)，したがってあらゆる τ 森にわたる和にしてよいので



8·1 図　左辺：ϕ^2 頂点⊗の挿入されたグラフ G で，$U_1=\{\gamma_1, \gamma_1', \gamma_1''\}$，$U_2=\{\gamma_2, \gamma_2'\}$ の例。
右辺：(14) 式第 2 項の例。第 1 グラフは $[R_\tau(\Gamma^{(4)}_{[\phi^2]_2})]_{p=0}$ に，第 2 グラフは $R_{G/\tau}(\Gamma^{(2)}_{[\phi^4]_4})$ にそれぞれ相当している。

ある。(13) の両辺を Feynman 被積分関数 $I_G(\Gamma^{(n)}_{\phi^2})$ に演算する。このとき，(13) の右辺第 2 項を演算する場合は，**7-3** (11) で注意したように $I_G=I_{G/\tau}\cdot I_\tau$ の積の形に書けることを用いる。さらに $[\phi^2]_4$ 頂点を含むくりこみ部分 τ は，(8) の公式に従い $4-n_\tau\geqq 0$，すなわち τ の外線数 n_τ が 2 または 4 の場合のみであって，その場合の $\hat{t}^\tau=t^\tau_{(4)}-t^\tau_{(2)}$ は，$n_\tau=2$ のとき，τ の外線運動量に関して（$t^\tau_{(4)}$ は 2 次まで $t^\tau_{(2)}$ は 0 次までの Taylor 演算子だから）2 次の部分のみ† を，$n_\tau=4$ のときは（$t^\tau_{(2)}=0$ で）0 次の部分のみを，それぞれ引き出す演算子であることに注意する。そうすれば，(13) の両辺を I_G に演算して次式を得る (8·1 図参照)：

$$
\begin{aligned}
R_G(\Gamma^{(n)}_{[\phi^2]_4}) = {} & R_G(\Gamma^{(n)}_{[\phi^2]_2}) - \sum_{\tau\in T_4} R_{G/\tau}(\Gamma^{(n)}_{[\phi^4]_4})\Big[R_\tau(\Gamma^{(4)}_{[\phi^2]_2})\Big]_{p=0} \\
& - \sum_{\tau\in T_2}\Bigg\{R_{G/\tau}(\Gamma^{(n)}_{[\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi]_4})\left[\frac{i^2\,\partial^2}{\partial p_1^\mu\,\partial p_2^\nu}R_\tau(\Gamma^{(2)}_{[\phi^2]_2})\right]_{p=0} \\
& + R_{G/\tau}(\Gamma^{(n)}_{[\partial^\mu\partial^\nu\phi\cdot\phi]_4})\left[\frac{i^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial p_1^\mu\,\partial p_1^\nu}R_\tau(\Gamma^{(2)}_{[\phi^2]_2})\right]_{p=0} \\
& + R_{G/\tau}(\Gamma^{(n)}_{[\phi\partial^\mu\partial^\nu\phi]_4})\left[\frac{i^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial p_2^\mu\,\partial p_2^\nu}R_\tau(\Gamma^{(2)}_{[\phi^2]_2})\right]_{p=0}\Bigg\} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

ただし，T_2, T_4 は，それぞれ外線数 n_τ が 2, 4 である（ϕ^2 頂点を含む）くりこみ部分の集合で，p_1, p_2 は $\tau\in T_2$ の 2 本の外線の運動量であり，$[\cdots]_{p=0}$ は τ の外線運動量をすべて 0 におくことを表す。今や $[R_\tau(\cdots)]_{p=0}$ は外線運動量によらない定数係数である。(14) を loop 積分†† し，あらゆる G

† 1 次の部分は Lorentz 不変性により出ない。
†† loop 積分も G/τ と τ のグラフのそれぞれに分離できることに注意せよ。

および τ について和をとれば，

$$\Gamma^{(n)}_{[\phi^2]_4}=\Gamma^{(n)}_{[\phi^2]_2}+\alpha\Gamma^{(n)}_{[\phi^4]_4}+\beta\Gamma^{(n)}_{[\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi]_4}+\gamma\Gamma^{(n)}_{[\phi\Box\phi]_4} \tag{15}$$

が従う。ただし，Lorentz 不変性より $[(\partial^2/\partial p^\mu\partial p^\nu)R_\tau(\Gamma^{(2)}_{[\phi^2]_2})]_{p=0}\propto g_{\mu\nu}$ となること，および $[\phi\Box\phi]_4=[\Box\phi\cdot\phi]_4$ であることを用いた。係数 α,β,γ は

$$\alpha=-\sum_{\text{あらゆるグラフ }G}\Big[R_G(\Gamma^{(4)}_{[\phi^2]_2})\Big]_{p=0}, \tag{16}$$

等で与えられる。(15) が任意の n 点頂点関数について成立するから，結局，望みの (9) が証明された†。

複合演算子の乗法的くりこみ解釈　演算子挿入がない通常の場合には，BPHZ 流くりこみが，裸の Lagrangian を組み換えて相殺項を用意する乗法的くりこみと解釈できることは前に述べたが，今の複合演算子の場合も乗法的くりこみで理解できる。

BPHZ 流にくりこんだ $\Gamma^{(n)}_{[O]_d}$ の定義式 (7) において，Taylor 演算 $(-t^\gamma)$ は，γ が $[O]_d$ 頂点を囲まない場合は通常の Lagrangian からの相殺項の寄与を引くのと同等であったが，γ が $[O]_d$ 頂点を囲んでいる場合は，新しい相殺項演算子の寄与を引いていることに相当する。この相殺項演算子 O' は，Taylor 演算子 t^γ の次数が (8) により $\omega(\gamma)=d-n_\gamma$ であるから，高々 $\omega(\gamma)$ 階の微分を持った場 ϕ について n_γ 次の局所演算子，

$$O'=(\partial)^k(\phi(x))^{n_\gamma}\qquad k=0,1,2,\cdots,\omega(\gamma)=d-n_\gamma \tag{17}$$

の形を持つ。この O' は，次元が $k+n_\gamma\leqq d$ である。それゆえ，$[O]_d$ を囲むくりこみ部分の $(-t^\gamma)$ は，結局，次元が d 以下の，O と同じ Lorentz 変換性，内部対称性を持つ，全く一般の演算子 O' を相殺項として引くことを意味する。

特に，正しい次元 $d=d_O$ を付与した正規積 $[O]_{d_O}$ のみを考えることにして，それを，くりこんだ複合演算子 O^{ren} と呼ぶことにする。そうすれば，BPHZ くりこみは，結局，ある次元 d_i の演算子 O_i^{ren} を，その次元以下の裸の演算子の完全系 $\{O_j^0\}$ を用いて

$$O_i^{\text{ren}}=\sum_{d_j\leqq d_i}Z_{ij}O_j^0,\qquad Z_{ij}=\delta_{ij}+\hbar Z_{ij}^{(1)}+\hbar^2Z_{ij}^{(2)}+\cdots \tag{18}$$

の形の乗法的くりこみを行うのと等価であることがわかる。右辺の展開の $\hbar^n Z_{ij}^{(n)}O_j^0$ $(n\geqq1)$ の寄与が，$(-t^\gamma)$ 演算に相当した相殺項として働くのである。ただ，この場合，乗法的くりこみ因子 Z_{ij} は，単なる定数ではなく行

---

† 問題にしている $[\phi^2]_4$ 演算子以外にも，複合演算子が挿入されている場合は，二つ以上の複合演算子頂点を含むくりこみ部分の寄与があり，(15) は少し変更を受ける。

列であり，$d_i \geqq d_j$ の行列成分だけ 0 でない下三角行列になっている，という点が以前の乗法的くりこみと少し異なる。BPHZ 処法でくりこまれた $O_i^{\mathrm{ren}}=[O_i]_{d_i}$ の場合は，外線運動量が 0 の点でのくりこみ条件を満たしている；例えば $O=\phi^4$ の場合は，q を O 頂点に入る運動量として，

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^{(4)}_{[\phi^4]_4}(q=0,\ \boldsymbol{p}=0)=4!, \qquad (\boldsymbol{p}\equiv(p_1, p_2, p_3, p_4)) \\
&\Gamma^{(2)}_{[\phi^4]_4}(q=0,\ p_i=0)=\partial^{\mu}_{p_i}\Gamma^{(2)}_{[\phi^4]_4}(q=0,\ p=0) \\
&\qquad\qquad =\partial^{\mu}_{p_i}\partial^{\nu}_{p_j}\Gamma^{(2)}_{[\phi^4]_4}(q=0,\ p=0)=0,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

の条件である。もちろん，このタイプ以外のくりこみ条件でくりこまれた複合演算子 $\{O_i^{\mathrm{ren}\prime}\}$ も定義でき，$\{O_j^{\mathrm{ren}}\}$ とは (18) と同じ形の下三角行列による有限くりこみの関係でつながる：

$$
O_i^{\mathrm{ren}\prime}=\sum_{d_j\leqq d_i} z_{ij}\, O_j^{\mathrm{ren}}. \tag{20}
$$

運動方程式と WT 恒等式　少し寄り道になるが，重要なので，ここで，BPHZ の枠内での運動方程式の使い方と WT 恒等式についてコメントしておこう。

BPHZ の意味での有効 Lagrangian $\mathcal{L}$ から従う運動方程式は

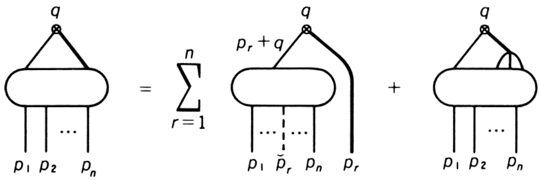
$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\right)\equiv\frac{\delta S}{\delta\phi(x)}=0 \qquad \left(S=\int dx\ \mathcal{L}\right) \tag{21}
$$

である。しかし，これは必ずしも演算子等式ではないので，Green 関数の中にこの因子 $\delta S/\delta\phi(x)$ が現れたからといってただちに 0 にはできない。BPHZ 手続きで有限にされた Green 関数を $\langle 0|\mathrm{T}\cdots|0\rangle$ と記すことにすれば，むしろ次の式が成立することを示したい：

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\mathrm{T}\left[\phi(z)\frac{\delta S}{\delta\phi(z)}\right]_d\phi(x_1)\,\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)|0\rangle \\
&\quad =i\sum_{r=1}^{n}\delta^4(z-x_r)\langle 0|\mathrm{T}\ \phi(z)\,\phi(x_1)\cdots\check{\phi}(x_r)\cdots\phi(x_n)|0\rangle.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

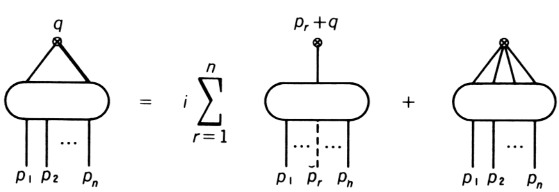
$\check{\phi}(x_r)$ は $\phi(x_r)$ を除く意味である。この式は d が複合演算子 $\phi(z)\,\delta S/\delta\phi(z)$ の正しい次元 4 以上のときなら常に，そして最初の因子 $\phi(z)$ を両辺でその微分 $\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_k}\phi(z)$ に置き換えても（d をそのときの正しい次元以上にする限り），成り立つ。(22) は形式的には，演算子型式で正準交換関係を用いて得られる等式とほぼ同じであるが，T 積が T* 積であることや $[\phi\delta S/\delta\phi]_d$ が機能的に上で導入した正規積である点など，あくまでも BPHZ 枠内の等式であることに注意したい。

(22) を証明するため，まず $\phi\delta S/\delta\phi=\phi[-(\Box+\mu^2)\phi-(\lambda/3!)\phi^3]$ のうち，



8·2 図

$-\phi(\Box+\mu^2)\phi\equiv V$ を挿入した“裸”の Green 関数 $G_V^{(n)}$ に効く Feynman グラフを(運動量表示で)考えよう。8·2図に示したように，V 頂点の Klein-Gordon 演算子の掛かった場 $-(\Box+\mu^2)\phi$ から出る線(太線で示した)は，一般に，直接外線 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ のどれかにつながるか，または $\lambda\phi^4$ 相互作用頂点につながるか，のどちらかである。ところが，$-(\Box+\mu^2)\phi$ の演算子 $-(\Box+\mu^2)$ はちょうど伝播関数† $i^{-1}(\Box+\mu^2)^{-1}$ を相殺して単なる数因子 i に変える働きを持つことに注意すれば，8·3図に示した等式が得られる。この等式の両辺に，⊗印を付けた V 頂点に次元 d を付与した BPHZ の R 演算を施す。8·3図左辺は $[-\phi(\Box+\mu^2)\phi]_d$ を挿入したくりこまれた Green 関数を与える。右辺第1項は V 頂点を囲むくりこみ部分はないから，通常の R 演算を受け，ちょうど(22)の右辺の項を与える。8·3図右辺第2項は，⊗印の V 頂点が $\phi i(-i\lambda\phi^3/3!)=\phi\cdot\lambda\phi^3/3!$ の複合場になっており，V を含むくりこみ部分は，もとの $-\phi(\Box+\mu^2)\phi$ に対すると同様，V を次元 d とみなした Taylor 引き算を受ける。それゆえ，R 演算後の第2項は，正規積 $[\phi\cdot\lambda\phi^3/3!]_d$ を挿入したくりこまれた Green 関数 $\langle 0|\,\mathrm{T}\,[\phi\cdot\lambda\phi^3/3!]_d\,\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\,|0\rangle$ を与え，左辺に移項して，$[\phi\cdot(-(\Box+\mu^2)\phi-\lambda\phi^3/3!)]_d$ 挿入項にまとめられ，(22)の左辺を与える。(証明終)



8·3 図

† ここでは考えやすさのため i の因子を整理する前の Feynman 則 **4-3** (37) を用いている。

BPHZ の枠内では，(22) の等式は大変有用なもので，例えば，カレント保存則から従う WT 恒等式も，この範ちゅうに含まれている。最も簡単な例として，複素スカラー場 φ の系で有効 Lagrangian が $\mathcal{L}=\partial_\mu\varphi^\dagger\partial^\mu\varphi-\mu^2\varphi^\dagger\varphi-\lambda(\varphi^\dagger\varphi)^2/2$ で与えられる場合を考える。このとき $U(1)$ カレント

$$j_\mu(x)=-i(\varphi^\dagger(x)\partial_\mu\varphi(x)-\partial_\mu\varphi^\dagger(x)\cdot\varphi(x))\equiv-i\varphi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial}_\mu\varphi(x) \tag{23}$$

は，素朴な運動方程式を用いて保存する：

$$\partial^\mu j_\mu(x)=-i(\varphi^\dagger\Box\varphi-\Box\varphi^\dagger\cdot\varphi)=i\left[\varphi^\dagger\frac{\delta S}{\delta\varphi^\dagger}-\frac{\delta S}{\delta\varphi}\varphi\right]. \tag{24}$$

スカラー場が何種類かある系では，(22) の等式が

$$\begin{aligned}&\langle 0|\mathrm{T}[\phi_j(z)\delta S/\delta\phi_k(z)]_d\,\phi_{i_1}(x_1)\phi_{i_2}(x_2)\cdots\phi_{i_n}(x_n)|0\rangle\\&=i\sum_{r=1}^{n}\delta^4(z-x_r)\delta_{ki_r}\langle 0|\mathrm{T}\,\phi_j(z)\,\phi_{i_1}(x_1)\cdots\check{\phi}_{i_r}(x_r)\cdots\phi_{i_n}(x_n)|0\rangle\end{aligned} \tag{25}$$

となることは容易にわかる。さらに，一般に正規積 $[O]_d$ に対して

$$\partial_\mu[O]_d=[\partial_\mu O]_{d+1} \tag{26}$$

の等号が成立することも，ω 次の Taylor 演算子 t^γ_ω が，γ の外線運動量因子 q_μ と $t^\gamma_{\omega+1}q_\mu=q_\mu t^\gamma_\omega$ の交換関係を満たすことから，明らかである。そこで，$U(1)$ カレント (23) を，正しい次元 3 を付与した正規積 $[j^\mu]_3$ として，それを挿入した Green 関数の発散 ∂_μ を計算すれば，(26), (24), (25) の等式を用いて次式を得る：

$$\begin{aligned}&\partial^z_\mu\langle 0|\mathrm{T}[j^\mu(z)]_3\,\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)\varphi^\dagger(y_1)\varphi^\dagger(y_2)\cdots\varphi^\dagger(y_m)|0\rangle\\&=-i\langle 0|\mathrm{T}\left[\varphi(z)\frac{\delta S}{\delta\varphi(z)}-\varphi^\dagger(z)\frac{\delta S}{\delta\varphi^\dagger(z)}\right]_4\\&\qquad\qquad\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\varphi^\dagger(y_1)\cdots\varphi^\dagger(y_m)|0\rangle\\&=\sum_{r=1}^{n}\delta^4(z-x_r)\langle 0|\mathrm{T}\,\varphi(z)\varphi(x_1)\cdots\check{\varphi}(x_r)\cdots\varphi(x_n)\varphi^\dagger(y_1)\cdots\varphi^\dagger(y_m)|0\rangle\\&\quad-\sum_{r=1}^{m}\delta^4(z-y_r)\langle 0|\mathrm{T}\,\varphi^\dagger(z)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\\&\qquad\qquad\varphi^\dagger(y_1)\cdots\check{\varphi}^\dagger(y_r)\cdots\varphi^\dagger(y_m)|0\rangle.\end{aligned} \tag{27}$$

この式が BPHZ 定式化における WT 恒等式であり，形式上，演算子型式で素朴に (すなわち紫外発散の問題を考えないで) 正準交換関係を用いて求めた WT 恒等式を再現している。

$U(1)$ カレント $[j_\mu]_3$ の代わりに，次元 4 のエネルギー・運動量テンソル $[T_{\mu\nu}]_4$ などでも全く同様である。また，次元 3 以下のソフトな破れのあるカレントの場合も同様な手法で分析できるが，ここでは立ち入らない。

演算子積展開 準備が整ったので，OPE 公式 (1) を BPHZ 定式化を用いて摂動論の枠内で証明することを始める。本質的には一般の場合も同じだから，ここでは最も簡単な場合，$\lambda\phi^4$ 理論で A も B も場 ϕ 自身の場合，のみを考えよう；すなわち

$$\mathrm{T}\phi(x+\xi)\phi(x-\xi)=\sum_i c_i(\xi)[O_i(x)]_{d_i} \qquad (d_i：O_i \text{ の正しい次元}) \tag{28}$$

の形の展開式が成立することを証明しよう。

問題にしている二つの演算子の積 $\phi(x+\xi)\phi(x-\xi)$ を挿入した（くりこまれた）Green 関数 $G^{(n)}_{\phi(x+\xi)\phi(x-\xi)}$ は，今の場合単に $n+2$ 点 Green 関数 $G^{(n+2)}$ である：

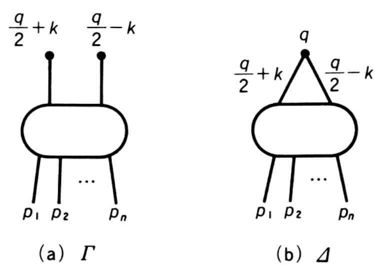
$$\begin{aligned}&\langle 0|\mathrm{T}\,\phi(x+\xi)\phi(x-\xi)\phi(y_1)\phi(y_2)\cdots\phi(y_n)|0\rangle\\&=\int\frac{d^4q\,d^4k}{(2\pi)^8}\prod_{i=1}^n\frac{d^4p_i}{(2\pi)^4}e^{-iqx-ik\cdot 2\xi}e^{-i\sum_i p_iy_i}\\&\quad\times(2\pi)^4\delta(q+\sum_i p_i)\,\widetilde{G}^{(n+2)}\left(\frac{q}{2}+k,\frac{q}{2}-k\,;\boldsymbol{p}\right).\end{aligned} \tag{29}$$

ここで，$\phi(x+\xi)$, $\phi(x-\xi)$ の脚の運動量をそれぞれ $q/2+k$, $q/2-k$（すなわち，重心運動量が q，相対運動量が k）とおき，他の外線運動量を $\boldsymbol{p}\equiv(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ とした。(29) で $\xi\to 0$ の振舞いを今から調べたいのだが，(29) は $\xi=0$ では $\int d^4k/(2\pi)^4$ 積分が loop 積分の形になり新たな紫外発散が生ずる，という構造になっている。そこで，演算子積 $\phi(x+\xi)\phi(x-\xi)$ に対して，それは離れた 2 点の場の積だけれども，上の局所積の場合と同様に正規積 $[\phi(x+\xi)\phi(x-\xi)]_d$ というものを，次のようにして導入する。

まず，Γ を $G^{(n+2)}$ に効く任意のグラフ [8·4 図 (a)] としたとき，端点 $x_1\equiv x+\xi$ と $x_2\equiv x-\xi$ とを一致させて得られるグラフ [8·4 図 (b)] $\varDelta$ を

$$\varDelta=\hat{\Gamma} \tag{30}$$

と記す。新たに生じた点 $x_1=x_2=x$ の ϕ^2 頂点を V と呼ぶ。この操作は，しかし，(29) の $\widetilde{G}^{(n+2)}$ に効く Feynman 被積分関数 I_Γ を何



8·4 図

も変更していない，

$$I_\Delta = l_\Gamma \tag{31}$$

ことに注意しよう。(29) からわかるように，I_Γ と思うか I_Δ と思うかは，単に，後から行う $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-2ik\xi}$ 積分が単なる Fourier 変換か，($\xi=0$ とおいて) loop 積分になるか，の違いだけである。そこで，次数が d の正規積 $[\phi(x_1)\phi(x_2)]_d$ を次のように定義する：あるグラフ Γ の寄与として

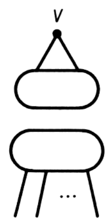
$$\langle 0|\mathrm{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)]_d\, \tilde{\phi}(p_1)\cdots\tilde{\phi}(p_n)|0\rangle^\Gamma \qquad (x_{1,2}\equiv x\pm\xi)$$
$$=\int\frac{d^4q d^4k}{(2\pi)^8} e^{-iqx-2ik\xi}(2\pi)^4\delta(q+\sum_i p_i)$$
$$\times\int\prod_{j=1}^{L} d^4 l_j\, R_\Delta^{(d)}\left(\frac{q}{2}+k, \frac{q}{2}-k;\, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{l}\right), \tag{32}$$

$$R_\Delta^{(d)} = \sum_{U\in\mathscr{F}(\Delta)} \prod_{\gamma\in U}(-t_{(d)}^\gamma) I_\Delta \tag{33}$$

と定義する。ただし，l_j は loop 運動量，$\tilde{\phi}(p)$ は運動量表示の場

$$\tilde{\phi}(p)\equiv\int d^4x\, e^{ipx}\phi(x) \tag{34}$$

であり，グラフ $\Delta=\hat{\Gamma}$ の V 頂点は次元 d を持つものとみなし，$\mathscr{F}(\Delta)$ はその場合のすべての Δ 森の集合，Taylor 演算子 $t_{(d)}^\gamma$ は，γ が V を含む場合はそれに応じた $\omega(\gamma)=d-n_\gamma$ 次 [(8)] のものである。



8·5 図

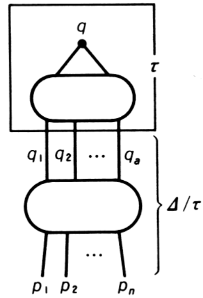
このように定義した正規積のうち，$d=0$ のもの，$[\phi(x_1)\phi(x_2)]_0$ は，V 頂点を含むくりこみ部分 γ としては，$\omega(\gamma)=0-n_\gamma\geqq 0$ のもの，すなわち 0 本足 ($n_\gamma=0$) のもののみであることに注意すれば，

$$\mathrm{T}\,\phi(x_1)\phi(x_2)-\langle 0|\mathrm{T}\,\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle = :\phi(x_1)\phi(x_2): \tag{35}$$

に一致することがわかる。なぜなら，$\hat{\Gamma}=\Delta$ のグラフで，$n_\gamma=0$ のものというのは，8·5 図に示したような非連結なグラフで，それを引くことは $\phi(x_1)\phi(x_2)$ の部分から真空期待値 $\langle 0|\mathrm{T}\,\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle$ を引くことに等しいからである。$d=1$ にしても，$\phi\to-\phi$ の対称性から $n_\gamma=1$ のグラフは存在せず，$n_\gamma=0$ の真空期待値は外線運動量依存性がないから，$d=0$ のものと同じである。したがって

$$[\phi(x_1)\phi(x_2)]_0=[\phi(x_1)\phi(x_2)]_1$$
$$=:\phi(x_1)\phi(x_2): \tag{36}$$

を得る。



8·6 図

$d\geqq 2$ の場合は非自明であり，これから $[\phi(x_1)\phi(x_2)]_d$ と $[\phi(x_1)\phi(x_2)]_{d-1}$ との差を評価することにしよう。この評価法は，上で引き過ぎ演算子 $[\phi^2]_4$ と通常の $[\phi^2]_2$ とを関係付けた議論と全く同様である。V 頂点に次元 d を付与する場合の Taylor 演算子 $t^{\gamma}_{(d)}$ は，次元 $d-1$ を付与する場合の $t^{\gamma}_{(d-1)}$ と最高次の $\omega(\gamma)=d-n_\gamma$ 次の部分を取り出す演算子 $\hat{t}^{\gamma}_{(d)}$ だけ異なる：

$$t^{\gamma}_{(d)}=t^{\gamma}_{(d-1)}+\hat{t}^{\gamma}_{(d)}. \qquad (37)$$

これを，前の $t^{\gamma}_{(4)}=t^{\gamma}_{(2)}+\hat{t}^{\gamma}$ と同様に扱えば，(13) に対応する式が成り立ち，それを I_Δ に演算すれば $R^{(d)}_\Delta$ の定義 (33) より次式を得る：

$$R^{(d)}_\Delta-R^{(d-1)}_\Delta$$
$$=\sum_{\tau\in T}\Big(\sum_{U_1\in\mathscr{F}(\Delta/\tau)}\prod_{\gamma\in U_1}(-t^{\gamma}_{(d)})I_{\Delta/\tau}\Big)(-\hat{t}^{\tau}_{(d)})\Big(\sum_{U_2\in\mathscr{F}(\tau)}\prod_{\gamma\in U_2}(-t^{\gamma}_{(d-1)})I_\tau\Big). \qquad (38)$$

ただし，ここでも $I_\Delta=I_{\Delta/\tau}\cdot I_\tau$ と書けることを用いた。8·6 図に描いたように，V 頂点を含むくりこみ部分 τ の $n_\tau\equiv a$ 本の外線の運動量を $q_1, q_2, \cdots, q_a$ と呼べば，$d-a$ 次項をとり出す演算子 $\hat{t}^{\tau}_{(d)}$ は†，

$$\hat{t}^{\tau}_{(d)}f=\sum_{\#(\mu)=d-a}\Big(\prod_{j=1}^{a}m(j)!\Big)^{-1}q_1^{(\mu)_1}q_2^{(\mu)_2}\cdots q_a^{(\mu)_a}\big[\partial^{q_1}_{(\mu)_1}\partial^{q_2}_{(\mu)_2}\cdots\partial^{q_a}_{(\mu)_a}f\big]_{q=0}$$
$$q_j^{(\mu)_j}\equiv q_j^{\mu_{j1}}q_j^{\mu_{j2}}\cdots q_j^{\mu_{jm(j)}}, \qquad (\mu)_j\equiv(\mu_{j1},\mu_{j2},\cdots,\mu_{jm(j)}),$$
$$\#(\mu)\equiv\sum_{j=1}^{a}m(j). \qquad (39)$$

で与えられる。この運動量因子 $q_1^{(\mu)_1}\cdots q_a^{(\mu)_a}$ を (38) の $I_{\Delta/\tau}$ の方にくっ付けて

$$I^{(\mu)_1(\mu)_2\cdots(\mu)_a}_{\Delta/\tau}\equiv(i)^{\#(\mu)}q_1^{(\mu)_1}q_2^{(\mu)_2}\cdots q_a^{(\mu)_a}I_{\Delta/\tau} \qquad (40)$$

と定義しておけば，(38) は (39) を用いて

$$R^{(d)}_\Delta-R^{(d-1)}_\Delta=-\sum_{\tau\in T}\sum_{\#(\mu)=d-a}\Big((-i)^{\#(\mu)}\Big/\prod_{j=1}^{a}m(j)!\Big)R^{(d)(\mu)_1\cdots(\mu)_a}_{\Delta/\tau}$$
$$\times\big[\partial^{q_1}_{(\mu)_1}\cdots\partial^{q_a}_{(\mu)_a}R^{(d-1)}_\tau\big]_{q=0}, \qquad (41)$$

$$R^{(d)(\mu)_1\cdots(\mu)_a}_{\Delta/\tau}\equiv\sum_{U\in\mathscr{F}(\Delta/\tau)}\prod_{\gamma\in U}(-t^{\gamma}_{(d)})I^{(\mu)_1\cdots(\mu)_a}_{\Delta/\tau}, \qquad (42)$$

$$R^{(d-1)}_\tau\equiv\sum_{U\in\mathscr{F}(\tau)}\prod_{\gamma\in U}(-t^{\gamma}_{(d-1)})I_\tau, \qquad (43)$$

と書ける。グラフ Δ/τ にとって $-q_j$ が“τ 頂点”から出る a 本の線の運動

† V 頂点にも運動量 q の流入があるから，$q_1, q_2, \cdots, q_a$ はすべて独立である。

量であるから，$-i(-q_j^\mu)=iq_j^\mu$ が x 表示で $\partial_x^\mu \phi$ に相当することに注意すると，$R_{\Delta/\tau}^{(d)(\mu)_1\cdots(\mu)_a}$ (の Lorentz の足 $(\mu)_j$ を下げたもの) は，ちょうど，

$$\begin{aligned}&\langle 0|\mathrm{T}[\phi_{(\mu)_1}(x)\,\phi_{(\mu)_2}(x)\cdots\phi_{(\mu)_a}(x)]_d\,\tilde{\phi}(p_1)\,\tilde{\phi}(p_2)\cdots\tilde{\phi}(p_n)|0\rangle\\ &\phi_{(\mu)_j}(x)\equiv\partial^x_{(\mu)_j}\phi(x)=\partial^x_{\mu_{j1}}\,\partial^x_{\mu_{j2}}\cdots\partial^x_{\mu_{jm(j)}}\phi(x)\end{aligned} \tag{44}$$

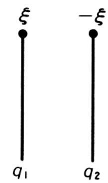
なる Green 関数への，グラフ Δ/τ の寄与になっていることがわかる。したがって，(41) の両辺に対し，(32) 右辺の積分演算 $\int d^4q\,d^4k/(2\pi)^8\,e^{-iqx-2ik\xi}$ $(2\pi)^4\delta(q+\sum p_i)\int\prod d^4l_j$ を施し，すべてのグラフ Γ，すべての τ にわたって和をとれば

$$\begin{aligned}&\langle 0|\mathrm{T}\,[\phi(x+\xi)\,\phi(x-\xi)]_d\,\tilde{\phi}(p_1)\cdots\tilde{\phi}(p_n)|0\rangle\\ &\qquad-\langle 0|\mathrm{T}\,[\phi(x+\xi)\,\phi(x-\xi)]_{d-1}\,\tilde{\phi}(p_1)\cdots\tilde{\phi}(p_n)|0\rangle\\ &=-\sum_{a=1}^{d}\sum_{\#(\mu)=d-a}F^{\{\mu\}}(\xi)\langle 0|\mathrm{T}\,[\phi_{(\mu)_1}(x)\cdots\phi_{(\mu)_a}(x)]_d\,\tilde{\phi}(p_1)\cdots\tilde{\phi}(p_n)|0\rangle\end{aligned} \tag{45}$$

が得られる。係数関数 $F^{\{\mu\}}(\xi)\equiv F^{(\mu)_1\cdots(\mu)_a}(\xi)$ は次式で与えられる：

$$F^{\{\mu\}}(\xi)=\frac{(-i)^{\#(\mu)}}{a!\prod_{j=1}^{a}m(j)!}\,\partial_{q_1}^{(\mu)_1}\,\partial_{q_2}^{(\mu)_2}\cdots\partial_{q_a}^{(\mu)_a}\,\bar{\Gamma}^{(a)}_{[\phi(\xi)\phi(-\xi)]_{d-1}}(q_1,\cdots,q_a)\Big|_{q=0} \tag{46}$$

ただし，(43) より，この $\bar{\Gamma}^{(a)}_{[\phi(\xi)\phi(-\xi)]_{d-1}}$ は，($a=2$ の場合のみ存在する) tree グラフ 8·7 図 の寄与を除いた，正規積 $[\phi(\xi)\phi(-\xi)]_{d-1}$ を挿入した a 点頂点関数 $\Gamma^{(a)}_{[\phi(\xi)\phi(-\xi)]_{d-1}}$ である†。



8·7 図　$\Gamma^{(2)\mathrm{tree}}_{[\phi(\xi)\phi(-\xi)]}$

(45) より，望みの次数 d と $d-1$ の正規積の関係式

$$\begin{aligned}&[\phi(x+\xi)\,\phi(x-\xi)]_d-[\phi(x+\xi)\,\phi(x-\xi)]_{d-1}\\ &\quad=-\sum_{a=1}^{d}\sum_{\#(\mu)=d-a}F^{\{\mu\}}(\xi)[\phi_{(\mu)_1}(x)\cdots\phi_{(\mu)_a}(x)]_d\end{aligned} \tag{47}$$

を得る。右辺に現れる局所積 $[\phi_{(\mu)_1}(x)\cdots\phi_{(\mu)_a}(x)]_d$ は，微分の次元が $\#(\mu)$，場の次元が a だから，皆ちょうど正しい次元 $d=\#(\mu)+a$ を持った (引き過ぎでない) 正規積演算子であることに注意しよう。ただ，残念ながら，$d\geqq 3$ でも係数関数 $F^{\{\mu\}}(\xi)$ は $\xi\to 0$ で (有限ではあるが) 0 となっていない。$\phi(x+\xi)\,\phi(x-\xi)$ は次元 2 であるから，次元 d の局所積演算子 $[\phi_{(\mu)_1}(x)\cdots\phi_{(\mu)_a}(x)]_d$ の係数は，$\xi\to 0$ で $\sim\xi^{d-2}$ と振舞って欲し

† tree グラフを除くのは，(43) の $R_\tau^{(d-1)}$ のグラフ τ が V 頂点を含むくりこみ部分に限られているからである。

いのである。この欠点は，しかし，次のように少し修正した正規積 (modified normal product) $[\cdots]'_d$ を導入すれば簡単に克服できる：

$$[\phi(x+\xi)\phi(x-\xi)]'_d \equiv \begin{cases} (1-t_\xi^{d-2})[\phi(x+\xi)\phi(x-\xi)]_d & d\geqq 2 \text{ のとき} \\ [\phi(x+\xi)\phi(x-\xi)]_d & d<2 \text{ のとき} \end{cases} \tag{48}$$

t_ξ^d は座標変数 ξ に関する d 次の Taylor 演算子である。まず，この新しい正規積が，$\xi^\mu/\sqrt{|\xi^2|}$ を有界に保った $\xi\to 0$ の極限で

$$[\phi(x+\xi)\phi(x-\xi)]'_d \sim s^{d-1}\times(\ln s \text{ のべき}), \qquad s\equiv\sqrt{|\xi^2|} \tag{49}$$

と振舞うことを示そう。元の正規積 $[\phi(x+\xi)\phi(x-\xi)]_d\equiv N_d(\xi)$ は，$\xi=0$ で $d-2$ 次以下の微係数がすべて有限に存在するから，Taylor 展開公式を使えて，ある $\theta\,(0<\theta<1)$ を用いて

$$(1-t_\xi^{d-3})N_d(\xi)=\sum_{\#(\mu)=d-2}(\#(\mu)!)^{-1}\xi^{(\mu)}[\partial^\xi_{(\mu)}N_d](\theta\xi) \tag{50}$$

が成り立ち，両辺から $(t_\xi^{d-2}-t_\xi^{d-3})N_d(\xi)$ を引いて

$$(1-t_\xi^{d-2})N_d(\xi) = \sum_{\#(\mu)=d-2}(\#(\mu)!)^{-1}\xi^{(\mu)}\left\{[\partial^\xi_{(\mu)}N_d](\theta\xi)-[\partial^\xi_{(\mu)}N_d](0)\right\} \tag{51}$$

を得る。ところが，右辺の｛　｝内の量は $s\to 0$ で $s\times(\ln s$ のべき) で振舞うから，(51) は望みの (49) の振舞いを証明している。次に，上で得た正規積の関係式 (47) に $(1-t_\xi^{d-3})$ を施してみる。そうすれば

$$\begin{aligned}&[\phi(x+\xi)\phi(x-\xi)]'_d-[\phi(x+\xi)\phi(x-\xi)]'_{d-1}\\ &\quad=-(t_\xi^{d-2}-t_\xi^{d-3})[\phi(x+\xi)\phi(x-\xi)]_d\\ &\qquad-\sum_{a=1}^{d}\sum_{\#(\mu)=d-a}(1-t_\xi^{d-3})F^{\{\mu\}}(\xi)[\phi_{(\mu)_1}(x)\cdots\phi_{(\mu)_a}(x)]_d\end{aligned} \tag{52}$$

となる。ところが右辺第 1 項に現れた余分な項は，右辺第 2 項にうまく吸収できて，(52) は次のきれいな形となる：

$$[\phi(x+\xi)\phi(x-\xi)]'_d-[\phi(x+\xi)\phi(x-\xi)]'_{d-1} = -\sum_{a=1}^{d}\sum_{\#(\mu)=d-a}C^{\{\mu\}}(\xi)[\phi_{(\mu)_1}(x)\cdots\phi_{(\mu)_a}(x)]_d, \tag{53}$$

$$C^{\{\mu\}}(\xi)=\frac{(-i)^{\#(\mu)}}{a!\prod_{j=1}^{a}m(j)!}\partial_{q_1}^{(\mu)_1}\cdots\partial_{q_a}^{(\mu)_a}\Gamma^{(a)}_{[\phi(\xi)\phi(-\xi)]'_{d-1}}(q_1,\cdots,q_a)\Big|_{q=0}. \tag{54}$$

すなわち，今度の係数関数 $C^{\{\mu\}}(\xi)$ は，修正された正規積 $[\phi(\xi)\phi(-\xi)]'_d$ が挿入された a 点頂点関数 $\Gamma^{(a)}_{[\phi(\xi)\phi(-\xi)]'_{d-1}}$ で与えられる。この頂点関数は，先ほどの $\overline{\Gamma}^{(a)}_{[\phi(\xi)\phi(-\xi)]_{d-1}}$ では除外されていた tree グラフの寄与も入った普通の

ものである。(46) の $F^{\{\mu\}}(\xi)$ に $(1-t_\xi^{d-3})$ を演算してみれば，挿入演算子が修正された正規積に変わることは自明である。(52) 右辺第1項の寄与が，ちょうど，欠けていた tree グラフの寄与を補うことになる，というのは次のように示せる。まず

$$
\begin{aligned}
&(t_\xi^{d-2}-t_\xi^{d-3})[\phi(x+\xi)\phi(x-\xi)]_d \\
&\quad=\sum_{\#(\mu)=d-2}(\#(\mu)!)^{-1}\xi^{(\mu)}[\partial^\xi_{(\mu)}(\phi(x+\xi)\phi(x-\xi))|_{\xi=0}]_d \\
&\quad=\sum_{m(1)+m(2)=d-2}\frac{\xi^{(\mu)_1}(-\xi)^{(\mu)_2}}{m(1)!\,m(2)!}[\phi_{(\mu)_1}(x)\,\phi_{(\mu)_2}(x)]_d \\
&\qquad\qquad(m(j)\equiv\#(\mu)_j)
\end{aligned}
\tag{55}
$$

である。一方，$C^{\{\mu\}}(\xi)$ 中の tree グラフの寄与は，$a=2$ の場合のみ有り，

$$
C^{\{\mu\}}_{\text{tree}}(\xi)=\frac{(-i)^{\#(\mu)}}{2!\,m(1)!\,m(2)!}(1-t_\xi^{d-3})\,\partial_{q_1}^{(\mu)_1}\partial_{q_2}^{(\mu)_2}\Gamma^{(2)\text{tree}}_{[\phi(\xi)\phi(-\xi)]_{d-1}}(q_1,q_2)\Big|_{q=0}
\tag{56}
$$

で与えられる。8·7 図に示した $\Gamma^{(2)\text{tree}}_{[\phi(\xi)\phi(-\xi)]_d}$ は，V 頂点がくりこみ部分でないので d によらず，$e^{iq_1\xi}e^{-iq_2\xi}+(q_1\leftrightarrow q_2)$ で与えられるから，

$$
\begin{aligned}
&\partial_{q_1}^{(\mu)_1}\partial_{q_2}^{(\mu)_2}\Gamma^{(2)\text{tree}}_{[\phi(\xi)\phi(-\xi)]_{d-1}}(q_1,q_2)|_{q=0} \\
&\qquad=(i)^{\#(\mu)}\{\xi^{(\mu)_1}(-\xi)^{(\mu)_2}+(-\xi)^{(\mu)_1}\xi^{(\mu)_2}\}
\end{aligned}
\tag{57}
$$

が得られる。$\#(\mu)=m(1)+m(2)=d-2$ より，(57) は ξ の $d-2$ 次斉次式で，(56) に代入すれば，t_ξ^{d-3} 項は効かず，$C^{\{\mu\}}_{\text{tree}}(\xi)[\phi_{(\mu)_1}(x)\,\phi_{(\mu)_2}(x)]_d$ がぴったり (55) に一致していることがわかる。

(53) の結果を，$d=2$ から $d={}^\exists\delta$ まで足し上げれば，前に注意した (35)，(36) を使って，次の最終結果を得る：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{T}\,\phi(x+\xi)\phi(x-\xi)=C_0(\xi)+\sum_{d=1}^{\delta}\sum_{a+\#(\mu)=d}C^{\{\mu\}}(\xi)[O_{\{\mu\}}(x)]_d \\
&\qquad\qquad\qquad+[\phi(x+\xi)\phi(x-\xi)]'_\delta, \\
&C_0(\xi)=\langle 0|\mathrm{T}\,\phi(x+\xi)\phi(x-\xi)|0\rangle, \\
&[O_{\{\mu\}}(x)]_d=[\partial_{(\mu)_1}\phi(x)\cdots\partial_{(\mu)_a}\phi(x)]_d.
\end{aligned}
\tag{58}
$$

これが，初めに述べた Wilson の OPE (1) に相当した，$A=B=\phi$ のときの展開式である。次元 d の局所積演算子 $[O_{\{\mu\}}]_d$ の係数関数 $C^{\{\mu\}}(\xi)$ は，(53) の関係式と (49) より，$\xi\to 0$ で高々

$$
C^{\{\mu\}}(\xi)\ \sim\ s^{d-2}\times(\ln s\ \text{のべき})
\tag{59}
$$

と振舞うことがわかるから，確かに Wilson の仮定したように $\ln s$ のべきを除いて $(1/s)^{d_A+d_B-d}=s^{d-2}$ の振舞いをしている。残りの項は

$$
[\phi(x+\xi)\phi(x-\xi)]'_\delta\ \sim\ s^{\delta-1}\times(\ln s\ \text{のべき})
\tag{60}
$$

と振舞うから，δ をどんどん大きくとれば，(58) の局所積演算子項 (第 2 項) がいくらでも精度よく，$\xi \to 0$ での $\mathrm{T}\,\phi(x+\xi)\,\phi(x-\xi)$ の振舞いを再現することを意味している。

OPE の最も重要な応用は，レプトン l (電子または μ) の核子標的深非弾性散乱，$l+N \to l+$anything，で観測されているいわゆる Bjorken (ビヨルケン) スケール則の破れの，QCD による計算である。この場合は，短距離極限 $\xi^\mu \to 0$ ではなく，光円錐極限 $\xi^2 \to 0$，$\xi^\mu \not\to 0$，が必要になり，短距離極限の場合より議論がより面倒になるが，結局は (58) の展開式に基づいて議論ができる。しかし，ここではこれに立入らない。

最後に，Wilson の仮定した OPE (1) と Zimmermann の証明した OPE (58) の違いについてコメントしておこう。i) まず Zimmermann の OPE は，摂動論の枠内であること，すなわち，摂動の任意の次数だが**有限次**までの証明である点である。したがって，例えば，(59) の ($\ln s$ のべき) の因子も無限次までいけば，s のべきを変更する可能性もある (これについては，後のくりこみ群の議論を見よ)。また，摂動はとった真空に本質的に依存するので，Zimmermann の OPE は真空ごとに別物である。これに対し，Wilson の欲した OPE は文字通り，演算子間の恒等式であって，運動方程式と同様，表現 (真空のとり方) によらず成立すべきものである。ii) これに関連するが，等式 (58) は，素な場 ϕ のみを含む Green 関数または頂点関数に対してのみ成り立つ。もし ϕ だけでなく，他に複合演算子 $A(y)$ が入っていれば変更を受ける。例えば，Green 関数

$$\langle 0|\mathrm{T}\,[\phi(x+\xi)\,\phi(x-\xi)]_d\,[A(y)]_{d_A}\,\phi(x_1)\,\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)|0\rangle \tag{61}$$

または $\Gamma^{(n)}_{[\phi(x+\xi)\phi(x-\xi)]_d[A(y)]_{d_A}}$ を考えると，(38) 中の τ として，$[\phi(x+\xi)\,\phi(x-\xi)]_d$ 頂点と $[A(y)]_{d_A}$ 頂点の両方を**同時に**含むくりこみ部分も入ってくる。そのような τ の寄与は，結局，$\phi(x+\xi)\,\phi(x-\xi)$ と $A(y)$ とがくっついた一つの局所演算子を与えることになり，(58) は

$$\begin{aligned}&\mathrm{T}\,\phi(x+\xi)\,\phi(x-\xi)\,[A(y)]_{d_A}\\&\quad=\mathrm{T}\,((58)\,\text{右辺})\,[A(y)]_{d_A}+\sum_i C_i'(\xi,x-y)\left[O_i\!\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]_{d_i}\end{aligned} \tag{62}$$

の形の展開式に置き換えられる。

8-2 くりこみ群方程式

場の理論で紫外発散を摂動計算で逐次くりこんでゆくやり方には，初めから質量殻上の値を観測される結合定数などの物理的値に直接一致させるようにくりこむ“質量殻上くりこみ”や，BPHZ の R 演算で実現されるような“$p=0$ での中間的くりこみ”など，種々なくりこみ処法が有り得ることは既に 7-2 で述べた。これらくりこみ処法のそれぞれは，結局，くりこみ部分に対してどういう**くりこみ条件**を設定しているか，ということで特徴付けられる。例えば $\lambda\phi^4$ 理論を例にとれば，質量殻上くりこみの場合は，7-2 (46) のくりこみ条件

$$\begin{aligned}&\Gamma^{(2)}(p^2=m^2, m^2, \lambda)=0,\\&(\partial/\partial p^2)\Gamma^{(2)}(p^2, m^2, \lambda)|_{p^2=m^2}=1,\\&\Gamma^{(4)}(\boldsymbol{p}, m^2, \lambda)|_{p_i\cdot p_j=m^2\delta_{ij}-\frac{1}{3}m^2(1-\delta_{ij})}=-\lambda,\end{aligned} \tag{1}$$

$p=0$ 中間的くりこみの場合は，7-2 (47) のくりこみ条件

$$\begin{aligned}&\Gamma^{(2)}(p^2=0, m^2, \lambda)=-m^2,\\&(\partial/\partial p^2)\Gamma^{(2)}(p^2, m^2, \lambda)|_{p^2=0}=1,\\&\Gamma^{(4)}(\boldsymbol{p}=0, m^2, \lambda)=-\lambda,\end{aligned} \tag{2}$$

が，それぞれ設定されていた。[この節では，μ^2 の文字をくりこみ点を表すのに使いたいので，ϕ 粒子の (2 乗) 質量または質量パラメータとしては μ^2 の代わりに m^2 を用いる。] もちろん，この 2 例以外にも種々なバリエーションがあり得て，例えば，

$$\begin{aligned}&\Gamma^{(2)}(p^2=m^2, m^2, \lambda;\ \mu^2)=0,\\&(\partial/\partial p^2)\Gamma^{(2)}(p^2, m^2, \lambda;\ \mu^2)|_{p^2=-\mu^2}=1,\\&\Gamma^{(4)}(\boldsymbol{p}, m^2, \lambda;\ \mu^2)|_{p_i\cdot p_j=-\mu^2\delta_{ij}+\frac{1}{3}\mu^2(1-\delta_{ij})}=-\lambda,\end{aligned} \tag{3}$$

などでもよい。この例 (3) では，第 1 条件より m^2 は物理的質量に固定されているが，μ^2 は，第 2 式の波動関数くりこみ，第 3 式の結合定数くりこみ，の 2 条件が設定される点，くりこみ点 (renormalization point)，を表し，全く任意の値でよい†。$\Gamma^{(n)}(\cdots;\mu^2)$ と記したのは，これらのくりこみ条件のために $\Gamma^{(n)}$ が余分なくりこみ点依存性を持ってくるからである。(3) の

† (3) では，$p^2\geq 4m^2$ で現れる特異性を避けるため，くりこみ点を spacelike ($p^2=-\mu^2<0$) な領域にとったが，しきい値 $p^2=4m^2$ までは大丈夫だから，$-\mu^2$ は正の値も許して $-\infty<-\mu^2<4m^2$ の領域のものとしてよい。

タイプのくりこみ条件では，くりこみ点 μ^2 が異なるごとに別のくりこみ処法であり，無限個のくりこみ処法の組を表している。

これら種々のくりこみ処法により得られる頂点関数や結合定数，$(\Gamma^{(n)}, \lambda)$ は，しかし，それらの与える物理的質量，物理的結合定数が同じである限り，7-2 で説明したようにお互いに有限くりこみでつながっている。しかも，あるくりこみ処法 P_1 による $(\Gamma_1^{(n)}, \lambda_1)$ から別のくりこみ処法 P_2 による $(\Gamma_2^{(n)}, \lambda_2)$ を得る有限くりこみの操作を“くりこみ変換”$\mathcal{R}_{21}$ と呼べば，この変換は $\mathcal{R}_{32}\mathcal{R}_{21}=\mathcal{R}_{31}$ 等を満たし明らかに群を成す。この群が一般にくりこみ群 (renormalization group) と呼ばれる。特に，(3) のタイプのような，くりこみ点 μ^2 でパラメトライズされるくりこみ処法の1組 $\{P_{\mu^2}\}$ の中だけに変換を限れば，くりこみ群は1パラメータ連続 (可換) 群となり，その無限小演算はくりこみ群方程式 (renormalization group equation) と呼ばれる微分方程式で表すことができる。くりこみ群方程式，略して RGE は，理論の高エネルギー極限などの振舞いに関して有用な情報を与える。

Gell-Mann-Low の RGE　まず，(3) のタイプのくりこみ条件でくりこまれた頂点関数に対するくりこみ群方程式を求めよう。これは ($\lambda\phi^4$ 理論の場合の) Gell-Mann-Low (ロウ) の RGE と呼ばれるものである。

直観的に理解しやすいように，7-2 で述べた，裸の量に言及した乗法的くりこみの立場から導こう。(3) のくりこみ条件でくりこんだ有効作用 $\Gamma[\phi; m^2, \lambda; \mu^2]$ が裸のそれ $\Gamma_0[\phi_0; m_0{}^2, \lambda_0; \Lambda^2]$ と，7-2 (44),(42) の関係式でつながっていることを思い起こそう†：

$$\Gamma[\phi;\ m^2, \lambda;\ \mu^2]=\Gamma_0[\phi_0;\ m_0{}^2, \lambda_0;\ \Lambda^2] \tag{4}$$

$$\phi_0(x)=Z_3{}^{1/2}\phi(x), \qquad m_0{}^2=m^2+\delta m^2, \qquad \lambda_0=Z_\lambda\lambda. \tag{5}$$

もちろん，前にも注意したように，(4) は $\Lambda\to\infty$ の場合の等式であると解すべきものである。摂動計算の各次数での相殺項を足し上げて得られる $Z_3, Z_\lambda, \delta m^2$ は，くりこみ条件 (3) を満たすべく決められるので，

$$Z_i=Z_i(\lambda_0, m_0/\Lambda, \Lambda/\mu) \qquad (i=3, \lambda) \tag{6}$$

$$\delta m^2=\Lambda^2 f(\lambda_0, m_0/\Lambda) \tag{7}$$

のパラメータ依存性を持つ。(7) に μ 依存性がないのは，今のくりこみの場合，m は物理的質量であり，それは裸の質量 m_0 と結合定数 λ_0 (と切断 Λ) を与えれば一意的に決まり，くりこみ点 μ^2 によらないからである。

† 7-2 で μ^2 と記した (2 乗) 質量または質量パラメータは，ここでは m^2 と記していることに注意。

さて，もともとの理論は，紫外発散をくりこむ手続きで勝手に持ち込んだくりこみ点 μ^2 に元来よっていないことが重要な点である。すなわち，(4) の右辺は明らかに μ に依存していないので，左辺の Γ も

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_0 \Gamma[\phi;\ m^2,\lambda;\ \mu^2]=0, \tag{8}$$

を満たさねばならない。ただしこの $(\partial/\partial\mu)_0$ は，裸の量 $\phi_0, m_0, \lambda_0, \Lambda$ を固定したときの微分であることに注意すべきである。くりこんだ Γ の引数 ϕ, m, λ のうち，ϕ と λ とが (5),(6) の関係式により μ に暗に依存していることに注意すれば，(8) は次のように書き換えられる：

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\left(\lambda,\frac{m}{\mu}\right)\frac{\partial}{\partial\lambda}-\gamma\left(\lambda,\frac{m}{\mu}\right)\phi\frac{\delta}{\delta\phi}\right)\Gamma[\phi;\ m^2,\lambda;\ \mu^2]=0 \tag{9}$$

$$\beta\left(\lambda,\frac{m}{\mu}\right)\equiv\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_0\lambda=-\lambda\mu\frac{\partial\ln Z_\lambda}{\partial\mu}\bigg|_{\lambda_0, m_0, \Lambda : \text{固定}} \tag{10}$$

$$\gamma\left(\lambda,\frac{m}{\mu}\right)\equiv-\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_0\ln\phi=\frac{1}{2}\mu\frac{\partial\ln Z_3}{\partial\mu}\bigg|_{\lambda_0, m_0, \Lambda : \text{固定}} \tag{11}$$

ただし，$\phi\,\delta/\delta\phi$ は $\int d^4x\,\phi(x)\,\delta/\delta\phi(x)$ または $\int d^4p\,\tilde{\phi}(p)\,\delta/\delta\tilde{\phi}(p)$ の略記である。ここで β, γ が λ と m/μ の有限な（すなわち Λ に依存しない）関数であることは，Z_λ, Z_m が（$\lambda_0, m_0/\Lambda, \Lambda/\mu$）の次元を持たない関数であることと，(9) 自体およびくりこんだ Γ が有限である事実とから従う。(9) は，有効作用 Γ を $\tilde{\phi}(p)$ で汎関数展開すれば，n 点頂点関数に対する方程式

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\left(\lambda,\frac{m}{\mu}\right)\frac{\partial}{\partial\lambda}-n\gamma\left(\lambda,\frac{m}{\mu}\right)\right)\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{p}, m^2, \lambda;\ \mu^2)=0 \tag{12}$$

を導く。(12) または (9) が，Gell-Mann-Low の RGE と呼ばれるものである。(9) や (12) は，μ^2 によるくりこまれた Γ が物理的に一つの理論を記述するためには，くりこみ点 μ^2 を動かしたとき，μ^2 で定義された結合定数 λ および波動関数の規格化を，β, γ で指定されるだけずらさねばならないことをいっている。微分演算子 $\mu\partial/\partial\mu+\beta\,\partial/\partial\lambda-\gamma\,\phi\,\delta/\delta\phi$ は，初めに述べたくりこみ変換の無限小演算子なのである。

Callan-Symanzik 方程式　Gell-Mann-Low の RGE と似ていて，同じような応用のされ方をする Callan-Symanzik (CS) 方程式と呼ばれるものがある。これは，理論の**質量を変える**ときの系の応答を与えるもので，上述の意味のくりこみ群の枠からは外れているが，もちろんくりこみに関係しているためくりこみ群方程式と呼ばれることも多い。

CS 方程式を導く場合には，(2) のタイプのくりこみ条件でくりこむ。このタイプの $\boldsymbol{p}=0$ でのくりこみ条件は，BPHZ の Taylor 引き算操作で自動的に実現できるもので，質量パラメータ m^2 や結合定数 λ は BPHZ の意味の有効 Lagrangian に現れるパラメータそのものである。この場合，くりこみ点 μ^2 というパラメータはないから，上の (4)～(7) に相当するくりこみ関係式は次のようになる：

$$\Gamma[\phi\,;\,m^2,\lambda]=\Gamma_0[\phi_0\,;\,m_0^2,\lambda_0\,;\,\Lambda^2] \tag{13}$$

$$\begin{aligned} Z_i&=Z_i(\lambda_0, m_0/\Lambda),\\ m^2&=\Lambda^2 f(\lambda_0, m_0/\Lambda). \end{aligned} \tag{14}$$

ここで，裸の有効作用 Γ_0 を $\partial/\partial m_0^2$ 微分することを考える。Γ_0 は裸の伝播関数 $(m_0^2-k^2)^{-1}$ を通じてのみ m_0^2 に依存しており，

$$\frac{\partial}{\partial m_0^2}\left(\frac{1}{m_0^2-k^2}\right)=\frac{1}{m_0^2-k^2}(-1)\frac{1}{m_0^2-k^2} \tag{15}$$

であることに注意すれば，$(\partial/\partial m_0^2)\Gamma_0$ が，運動量 $q=0$ を運ぶ演算子 $\theta_0\equiv(1/2)\phi_0{}^2$ の -1 倍の挿入に等しいことがわかる：

$$(\partial/\partial m_0^2)\Gamma_0[\phi_0\,;\,m_0^2,\lambda_0\,;\,\Lambda^2]=-\Gamma_{0\theta_0}[q=0\,;\,\phi_0\,;\,m_0^2,\lambda_0\,;\,\Lambda^2] \tag{16}$$

ところが，前節 **8-1** (18) で述べたように，一般に次元 d の複合演算子は次元 d 以下の演算子で乗法的にくりこめ，今の場合，次元 2 以下の ($\phi\to-\phi$ で偶な) 演算子は ϕ^2 しか存在しないから

$$\theta_0=Z_\theta^{-1}\,\theta, \qquad \theta\equiv\frac{1}{2}[\phi^2]_2 \tag{17}$$

とくりこめる。すなわち，θ_0 挿入の裸の有効作用 $\Gamma_{0\theta_0}$ は

$$\Gamma_{0\theta_0}[q\,;\,\phi_0\,;\,m_0^2,\lambda_0\,;\,\Lambda^2]=Z_\theta^{-1}\,\Gamma_\theta[q\,;\,\phi\,;\,m^2,\lambda] \tag{18}$$

のくりこみで，有限な θ 挿入の有効作用 Γ_θ を与える。(17) で θ は正規積 $[(1/2)\phi^2]_2$ ととったから，そのくりこみ条件は BPHZ のそれ，

$$\Gamma_\theta^{(2)}[q=0,\ p_1=p_2=0]=1 \tag{19}$$

である。

さて，(16) の両辺の $\Gamma_0, \Gamma_{0\theta_0}$ に，それぞれ (13),(18) を代入してくりこまれた Γ, Γ_θ で書き直そう。このとき，再び $\partial/\partial m_0^2$ が裸の量 $\phi_0, \lambda_0, \Lambda$ を固定した微分であること，および (14) に注意して

$$Z_\theta\left[\left(\frac{\partial m^2}{\partial m_0^2}\right)\frac{\partial}{\partial m^2}+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial m_0^2}\right)\frac{\partial}{\partial\lambda}+\left(\frac{\partial\ln\phi}{\partial m_0^2}\right)\phi\frac{\delta}{\delta\phi}\right]\Gamma=-\Gamma_\theta, \tag{20}$$

すなわち，これに $2m^2(Z_\theta\,\partial m^2/\partial m_0^2)^{-1}$ を掛ければ

$$\left(m\frac{\partial}{\partial m}+\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}-\gamma(\lambda)\phi\frac{\delta}{\delta\phi}\right)\Gamma[\phi\,;\,m^2,\lambda]$$
$$=-2m^2\alpha(\lambda)\Gamma_\theta[q=0;\,\phi;\,m^2,\lambda] \tag{21}$$

$$\frac{1}{\alpha(\lambda)}\equiv Z_\theta\frac{\partial m^2}{\partial m_0^2}\bigg|_{\lambda_0,\Lambda:\text{固定}} \tag{22}$$

$$\beta(\lambda)\equiv-2m^2\alpha(\lambda)Z_\theta\lambda\frac{\partial\ln Z_\lambda}{\partial m_0^2}\bigg|_{\lambda_0,\Lambda:\text{固定}} \tag{23}$$

$$\gamma(\lambda)\equiv m^2\alpha(\lambda)Z_\theta\frac{\partial\ln Z_3}{\partial m_0^2}\bigg|_{\lambda_0,\Lambda:\text{固定}} \tag{24}$$

が得られる。係数 α,β,γ が λ のみの有限な関数であることも，再び，方程式 (21) 自身と Γ,Γ_θ が有限である事実とから従う†。(21)，あるいは Γ,Γ_θ を $\tilde{\phi}(p)$ で展開した n 点頂点関数 $\Gamma^{(n)},\Gamma_\theta^{(n)}$ に対して得られる

$$\left(m\frac{\partial}{\partial m}+\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}-n\gamma(\lambda)\right)\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{p},m^2,\lambda)$$
$$=-2m^2\alpha(\lambda)\Gamma_\theta^{(n)}(q=0\,;\,\boldsymbol{p},m^2,\lambda) \tag{25}$$

を CS 方程式と呼ぶ。

(21),(25) の右辺に現れる係数関数 $\alpha(\lambda)$ は，実は $\gamma(\lambda)$ で書ける。なぜなら，(25) を $n=2$ の場合に適用し $p^2=0$ とおけば，くりこみ条件 (2) の第 1 式および (19) を用いて，関係式

$$1+\gamma(\lambda)=\alpha(\lambda) \tag{26}$$

が従うからである。(24) より $\gamma(\lambda)=O(\lambda^2)$ であり，よって $\alpha(\lambda)=1+O(\lambda^2)$ であるから，複合演算子 $\theta=[(1/2)\phi^2]^{\text{ren}}$ のくりこみ条件 (19) を $\Gamma_\theta^{(2)}[q=0,\ p_{1,2}=0]=\alpha(\lambda)$ に変更することもでき，その場合には (21),(25) 右辺の $\alpha(\lambda)$ は θ に吸収され，見かけ上 $\alpha=1$ の形の方程式になる。普通 CS 方程式という場合，$\alpha=1$ の形に書かれたものを指すことも多い。

質量によらないくりこみに基づく斉次 RGE Gell-Mann-Low の RGE (12) の場合には係数関数 β,γ が，結合定数 λ だけでなく m/μ にも依存している点，CS 方程式 (25) の場合には右辺に非斉次項 $\Gamma_\theta^{(n)}$ が現れて $\Gamma^{(n)}$ に対して閉じた方程式になっていない点，がそれぞれ不便である††。7-5 で説明した質量によらないくりこみに基づけば，これらの点を改良した

---

† 次元をもつ切断パラメータ Λ に依存しないから，くりこんだ質量パラメータ m にも依存できないのである。

†† 高エネルギー極限の振舞いを考えるときには，これら m/μ 依存性や $\Gamma_\theta^{(n)}$ は無視できることがいえ，GL 方程式，CS 方程式ともに有用なのであるが。

RGEが得られる。

この場合のくりこみ条件として 7-5 (2)〜(5)(で場 ϕ_i の添字 i がない場合のもの)をとってもよい。しかし，単に後の議論の便宜のために，7-5 (3)の部分だけを変更した次のくりこみ条件をとることにする：

$$\begin{aligned}&\Gamma^{(2)}(p^2=0, m^2, \lambda\,;\,\mu^2)|_{m^2=0}=0,\\&\Gamma^{(2)}(p^2=0, m^2, \lambda\,;\,\mu^2)|_{m^2=\mu^2}=-\mu^2,\\&(\partial/\partial p^2)\Gamma^{(2)}(p^2, m^2, \lambda\,;\,\mu^2)|_{p^2=0, m^2=\mu^2}=1,\\&\Gamma^{(4)}(\boldsymbol{p}=0, m^2, \lambda\,;\,\mu^2)|_{m^2=\mu^2}=-\lambda.\end{aligned}\tag{27}$$

すなわち 7-5 (3)の条件を，ここの第2式に差し替えたのである。7-5 (2)〜(5)のくりこみ条件であれ，この場合の(27)の条件であれ，くりこまれた有効作用と裸の有効作用の関係式は，7-5 (14),(10)〜(13)で与えた形をとる：

$$\Gamma[\phi\,;\,m^2, \lambda\,;\,\mu^2]=\Gamma_0[\phi_0\,;\,m_0^2+\delta m_0^2, \lambda_0\,;\,\Lambda^2]\tag{28}$$

$$\begin{aligned}&\phi_0=Z_3^{1/2}\phi, \qquad m_0^2=Z_m m^2, \qquad \lambda_0=Z_\lambda\lambda,\\&Z_i=Z_i(\lambda_0, \Lambda/\mu) \qquad (i=3, m, \lambda),\end{aligned}\tag{29}$$

$$\delta m_0^2=\Lambda^2 f(\lambda_0).\tag{30}$$

特に，δm_0^2 が μ にも m にも依存しないという関係式(30)は，7-5 (13)でも述べたように(27)の第1式のくりこみ条件をおいておけば成立している。

Gell-Mann-Low の場合と同様に，裸の量 $\phi_0, m_0, \lambda_0, \Lambda$ を固定した微分 $(\mu\partial/\partial\mu)_0$ を(28)に施せば，右辺は(特に δm_0^2 が μ, m に依存してないから) 0 となり

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}-\gamma_m(\lambda)m^2\frac{\partial}{\partial m^2}-\gamma(\lambda)\phi\frac{\delta}{\delta\phi}\right)\Gamma[\phi\,;\,m^2, \lambda\,;\,\mu^2]=0\tag{31}$$

が得られる。ただし，β, γ_m, γ は

$$\beta(\lambda)\equiv\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_0\lambda=-\lambda\mu\frac{\partial\ln Z_\lambda}{\partial\mu}\bigg|_{\lambda_0, \Lambda\,:\,\text{固定}}\tag{32}$$

$$\gamma_m(\lambda)\equiv-\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_0\ln m^2=\mu\frac{\partial\ln Z_m}{\partial\mu}\bigg|_{\lambda_0, \Lambda\,:\,\text{固定}}\tag{33}$$

$$\gamma(\lambda)\equiv-\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_0\ln\phi=\frac{1}{2}\mu\frac{\partial\ln Z_3}{\partial\mu}\bigg|_{\lambda_0, \Lambda\,:\,\text{固定}}\tag{34}$$

で定義され，再びそれらは，くりこまれた Γ の方程式(31)自体から切断 Λ に依存しないことが従い，結合定数 λ のみの関数であることがわかる。

(31), あるいは, それと等価な, n 点頂点関数 $\Gamma^{(n)}$ に対する

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}-\gamma_m(\lambda)m^2\frac{\partial}{\partial m^2}-n\gamma(\lambda)\right)\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{p},m^2,\lambda\,;\,\mu^2)=0 \quad (35)$$

が, 斉次 RGE または改善された RGE と呼ばれる方程式である。

この斉次 RGE (31) は, 一般化された無限個の CS 方程式の組に等価である。このことは, 質量によらないくりこみ (MIR) の場合のくりこみ条件と, CS の場合のくりこみ条件とが, それぞれ, (27) に与えたものと (2) で与えたものとの場合のようによく対応しているときは,特に簡単に示せる。

区別のため, MIR のくりこみ条件 (27) でくりこまれた有効作用を $\Gamma^{\rm MIR}$, CS のくりこみ条件 (2) でくりこまれたそれを $\Gamma^{\rm CS}$ と書く。また CS の場合の質量パラメータを $\bar{m}$ と記し, MIR の場合の変数としての質量パラメータ m と区別することにする。そこでまず, 一つの裸の理論が与えられているとき, (2) のような CS のくりこみ条件の任意の組はくりこまれた Green 関数や有効作用を完全に一意的に決定している, ということに注意する。その上で, $\Gamma^{\rm MIR}[\phi;\,m^2,\lambda;\,\mu^2]$ が, m^2,μ^2 の両方を CS の質量パラメータ $\bar{m}^2$ と一致させたとき, (27) の第 2, 3, 4 式の条件により, CS のくりこみ条件 (2) を三つとも満たしていることに注意すれば,

$$\Gamma^{\rm MIR}[\phi\,;\,m^2=\bar{m}^2,\ \lambda\,;\,\mu^2=\bar{m}^2]=\Gamma^{\rm CS}[\phi\,;\,\bar{m}^2,\lambda] \quad (36)$$

の等式が成立することが結論できる。次に, $\Gamma^{\rm MIR}[\phi\,;\,m^2,\lambda\,;\,\mu^2=\bar{m}^2]$ を m^2 に関して $m^2=\bar{m}^2$ 回りに Taylor 展開する：

$$\Gamma^{\rm MIR}[\phi\,;\,m^2,\lambda\,;\,\mu^2=\bar{m}^2]=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l\,!}(m^2-\bar{m}^2)^l\left(\frac{\partial}{\partial m^2}\right)^l\Gamma^{\rm MIR}\Big|_{m^2=\mu^2=\bar{m}^2} \quad (37)$$

この展開の初項は (36) により $\Gamma^{\rm CS}$ を与えている。$l\geqq 1$ の第 2 項以降は,

$$(\partial/\partial m^2)_{\lambda,\mu}=Z_m(\partial/\partial m_0^2)_{\lambda_0,\Lambda}=Z_m(\partial/\partial(m_0^2+\delta m_0^2))_{\lambda_0,\Lambda} \quad (38)$$

で $m_0^2+\delta m_0^2$ が理論の裸の 2 乗質量であることに注意すれば, CS の場合の議論 (特に (16)) を思い起こして, 運動量 0 の複合演算子 $\theta=Z_\theta\theta_0$ を l 回挿入した CS の有効作用 $\Gamma_{\theta^l}^{\rm CS}$ に比例することがわかる：

$$(\partial/\partial m^2)^l\,\Gamma^{\rm MIR}|_{m^2=\mu^2=\bar{m}^2}=(-Z_mZ_\theta^{-1})^l\,\Gamma_{\theta^l}^{\rm CS}[\mathbf{0}\,;\,\phi\,;\,\bar{m}^2,\lambda]. \quad (39)$$

微分演算子 $\mathcal{D}\equiv\mu\,\partial/\partial\mu-\gamma_m\,m^2\,\partial/\partial m^2$ が, 変数変換 $(\mu^2,m^2)\to(\mu^2,m^2-\mu^2)$ に際して

$$\begin{aligned}\mathcal{D}&=(\mathcal{D}\,\mu^2)(\partial/\partial\mu^2)_{m^2-\mu^2}+[\mathcal{D}\,(m^2-\mu^2)](\partial/\partial(m^2-\mu^2))_{\mu^2}\\&=(\mu\partial/\partial\mu)_{m^2-\mu^2}-[\gamma_m(m^2-\mu^2)+(2+\gamma_m)\,\mu^2](\partial/\partial(m^2-\mu^2))_{\mu^2}\end{aligned} \quad (40)$$

と書き換えられることに注意すれば, $\Gamma^{\rm MIR}$ の斉次 RGE (31) は, Taylor 展開 (37) および (39) を代入して, 次の無限個の方程式の組を与えることが

わかる： $l=0,1,2,\cdots$ に対して

$$\left(\bar{m}\frac{\partial}{\partial\bar{m}}+\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}-l\gamma_\theta(\lambda)-\gamma(\lambda)\phi\frac{\delta}{\delta\phi}\right)\Gamma_{\theta^l}^{\rm CS}=-2\bar{m}^2\alpha(\lambda)\Gamma_{\theta^{l+1}}^{\rm CS}. \tag{41}$$

$$\gamma_\theta(\lambda)\equiv\bar{m}\frac{\partial\ln Z_\theta(\lambda_0,\Lambda/\bar{m})}{\partial\bar{m}}\bigg|_{\lambda_0,\,\Lambda\,:\,\text{固定}}$$

ただし，ここで $(\mu\partial/\partial\mu+\beta\partial/\partial\lambda)\ln(Z_m Z_\theta^{-1})=(\mu\partial/\partial\mu)_0\ln(Z_m Z_\theta^{-1})=\gamma_m-\gamma_\theta$ を用い，また右辺に現れる係数に対して

$$(2+\gamma_m(\lambda))Z_m Z_\theta^{-1}=2\alpha(\lambda) \tag{42}$$

の等式を用いた。この式 (42) は，(29), (30) で与えた MIR の場合の質量くりこみの関係式 $m_0^2+\delta m_0^2=Z_m(\lambda_0,\Lambda/\mu)m^2+\Lambda^2 f(\lambda_0)$ で，CS の場合に対応した値 $m_0^2+\delta m_0^2=\bar{m}_0^2$, $m^2=\bar{m}^2$, $\mu^2=\bar{m}^2$ においたものを，CS の係数 $\alpha(\lambda)$ の定義式 (22)，$(\alpha(\lambda)Z_\theta)^{-1}=(\partial\bar{m}^2/\partial\bar{m}_0^2)_{\lambda_0,\Lambda}$，に対し使ってやれば，

$$\begin{aligned}(\alpha(\lambda)Z_\theta)^{-1}&=(\partial/\partial\bar{m}_0^2)_{\lambda_0,\Lambda}[Z_m^{-1}(\lambda_0,\Lambda/\bar{m})(\bar{m}_0^2-\Lambda^2 f(\lambda_0))]\\&=Z_m^{-1}-\bar{m}^2\left(\frac{\partial\bar{m}^2}{\partial\bar{m}_0^2}\right)_{\lambda_0,\Lambda}\frac{\partial\ln Z_m(\lambda_0,\Lambda/\mu)}{\partial\mu^2}\bigg|_{\mu=\bar{m}}\\&=Z_m^{-1}-(\alpha(\lambda)Z_\theta)^{-1}\gamma_m(\lambda)/2,\end{aligned} \tag{43}$$

なる式が導かれることから，得られる。(41) は，$l=0$ の式がちょうど CS 方程式 (21) を再現しており，θ 挿入有効作用に対する無限の連鎖方程式系で，一般化された CS 方程式の組 (set of generalized CS equations) と呼ばれるものである。正確にいえば，(41) の $\beta(\lambda), \gamma(\lambda)$ は MIR による斉次 RGE の係数で，CS 方程式 (21) の $\beta(\lambda), \gamma(\lambda)$ と一致していることを上では直接示してはいないが，実は，CS 方程式の形自体から，その係数 $\beta(\lambda)$, $\gamma(\lambda)$ が，$\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{p}), \Gamma_\theta^{(n)}(\boldsymbol{p})$（の何点かの値）の情報で一意的に決まる（演習問題 8.2）ので，上で示した Γ 間の等式 (36), (39) があれば充分なのである。すなわち，MIR による斉次 RGE の係数 $\beta(\lambda), \gamma(\lambda)$ と CS 方程式のそれとは一致している。

8-3 くりこみ群とスケール則

斉次 RGE の解 斉次 RGE 8-2 (31) を解くのは容易である。8-2 (31) と同じ形の

$$\frac{\partial}{\partial t}S(t,\boldsymbol{x})+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\cdot\nabla S(t,\boldsymbol{x})=0 \tag{1}$$

のタイプの方程式は，点 $\boldsymbol{x}$ での速度が $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ で与えられる定常流体の場合

によく現れる式で，流体と共に動く観測者から見れば量 S は時間的に変化しないことを表している：

$$\frac{d}{dt}S(t,\bar{\boldsymbol{x}}(t))=0, \tag{2}$$

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{x}}(t)}{dt}=\boldsymbol{v}(\bar{\boldsymbol{x}}(t)), \qquad \bar{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{x} \tag{3}$$

$\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ は，流体と共に動き $t=0$ で $\boldsymbol{x}$ にいる観測者の位置である。この $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ を，初期位置を明確にして $\bar{\boldsymbol{x}}(t;\boldsymbol{x})$ と書けば，時刻 $-t$ の位置 $\bar{\boldsymbol{x}}(-t;\boldsymbol{x})$ は時間の並進不変性から，時刻 t に点 $\boldsymbol{x}$ に来る流体の時刻 0 での位置でもあることに注意しよう。そうすれば，流体と共に動くと S が変化しないのだから，明らかに，(1) の解は次式で与えられる：

$$S(t,\boldsymbol{x})=S(0,\bar{\boldsymbol{x}}(-t;\boldsymbol{x})). \tag{4}$$

斉次 RGE **8-2** (31) の場合，$\phi\,\delta/\delta\phi$ は汎関数微分であるが，$\phi(x)$ の x によらない全体のスケールだけが問題であるから，ϕ をあたかも一変数とみなしてもよく，**8-2** (31) の (λ, m^2, ϕ) を (1) の $\boldsymbol{x}$ に対応させられる。そして，$\mu\partial/\partial\mu=\partial/\partial t$ なる同定をするため

$$t=\ln\mu/\mu_0 \qquad \text{または} \qquad \mu=e^t\mu_0 \tag{5}$$

と定義して，(3) に対応した微分方程式，境界条件

$$\frac{d\bar{\lambda}(t)}{dt}=\beta(\bar{\lambda}(t)), \qquad \bar{\lambda}(0)=\lambda, \tag{6}$$

$$\frac{d\ln\bar{m}^2(t)}{dt}=-\gamma_m(\bar{\lambda}(t)), \qquad \bar{m}^2(0)=m^2, \tag{7}$$

$$\frac{d\ln\bar{\phi}(t)}{dt}=-\gamma(\bar{\lambda}(t)), \qquad \bar{\phi}(0)=\phi, \tag{8}$$

を満たす解を $\bar{\lambda}(t), \bar{m}^2(t), \bar{\phi}(t)$ と呼ぶ。そうすれば，(4) より，斉次 RGE **8-2** (31) の解は

$$\Gamma[\phi\,;m^2,\lambda\,;\mu^2]=\Gamma[\bar{\phi}(-t)\,;\bar{m}^2(-t),\bar{\lambda}(-t)\,;\mu_0^2] \tag{9}$$

となる。(6) の解 $\bar{\lambda}(t)$ がいったん知られれば，(7), (8) の解は

$$\bar{m}^2(t)=m^2\exp\left[-\int_0^t dt'\,\gamma_m(\bar{\lambda}(t'))\right], \tag{10}$$

$$\bar{\phi}(t)=\phi\exp\left[-\int_0^t dt'\,\gamma(\bar{\lambda}(t'))\right], \tag{11}$$

と与えられることに注意しよう。特に (11) を用いて，(9) を n 点頂点関数の言葉で書き直すと次式が得られる：

$$\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{p}, m^2, \lambda ; \mu^2)$$
$$=\exp\left[-n\int_0^{-t} dt' \, \gamma(\bar{\lambda}(t'))\right]\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{p}, \bar{m}^2(-t), \bar{\lambda}(-t); \mu_0^2). \qquad (12)$$

(12) は，エネルギー・スケールが変化したときの $\Gamma^{(n)}$ の振舞いに関する情報を含んでいる。この点をより明確にするため，まず，$\Gamma^{(n)}$ が次元 $4-n$ の量であることから自明な次式が成り立つことに注意する：

$$\Gamma^{(n)}(k\boldsymbol{p}, k^2m^2, \lambda ; k^2\mu^2)=k^{4-n}\,\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{p}, m^2, \lambda ; \mu^2). \qquad (13)$$

ここで $k=e^{-t}$ として，右辺の $\Gamma^{(n)}$ に (12) を代入すれば

$$\Gamma^{(n)}(e^{-t}\boldsymbol{p}, e^{-2t}m^2, \lambda ; e^{-2t}\mu^2)=\exp\left[-(4-n)t-n\int_0^{-t} dt'\gamma(\bar{\lambda}(t'))\right]$$
$$\times\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{p}, \bar{m}^2(-t), \bar{\lambda}(-t) ; \mu_0^2). \qquad (14)$$

さらに，$t\to -t$，$\mu_0\to\mu$，$m^2\to e^{-2t}m^2$ の書き換えを行えば，(5) より μ^2 が $e^{2t}\mu^2$ に，(10) より $\bar{m}^2(-t)$ が $e^{-2t}\bar{m}^2(t)$ に，なることがわかり，最終的に

$$\Gamma^{(n)}(e^{t}\boldsymbol{p}, m^2, \lambda ; \mu^2)=\exp\left[(4-n)t-n\int_0^{t} dt'\gamma(\bar{\lambda}(t'))\right]$$
$$\times\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{p}, e^{-2t}\bar{m}^2(t), \bar{\lambda}(t) ; \mu^2) \qquad (15)$$

が得られる。

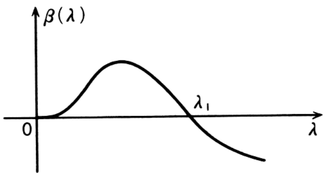
解 (15) は，エネルギー・運動量を $\boldsymbol{p}$ から $e^t\boldsymbol{p}$ へスケールを変えたときの，$\Gamma^{(n)}$ の振舞い方を指定している。この意味をみるため，まず，相互作用のない ($\lambda=0$) 場合を考えてみる。$\lambda=0$ のときは，$\beta(\lambda)$, $\gamma(\lambda)$, $\gamma_m(\lambda)$ は皆 $O(\lambda^2)$ の量であるから 0 となり，$\bar{m}(t)=m$，$\bar{\lambda}(t)=\lambda$ となるから，(15) は次式に帰着する：

$$\Gamma^{(n)}(e^{t}\boldsymbol{p}, m^2, \lambda ; \mu^2)=e^{(4-n)t}\,\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{p}, e^{-2t}m^2, \lambda ; \mu^2). \qquad (16)$$

この場合は，実は，くりこみ点 μ^2 依存性もないので，この式 (16) は単なる次元則 (13) と同じである。右辺の指数部 $(4-n)$ は $\Gamma^{(n)}$ の次元であり，このうち 4 は (次元 0 の有効作用 Γ を) 運動量保存因子 $(2\pi)^4\delta^4(\sum p_i)$ で割ったことから，$-n$ は，次元 1 を持つ場 ϕ の n 乗 $\phi_1\phi_2\cdots\phi_n$ で割ったところから，それぞれきていることに注意しよう。ところが，一方，相互作用が入った場合は (16) は (15) の等式へ変更を受ける。まず (15) の指数部の n 比例項が，$-nt$ から $-n\left[1+t^{-1}\int_0^t dt'\gamma(\bar{\lambda}(t'))\right]t$ に変わっている。これは場 ϕ の次元が，相互作用の影響で，あたかも 1 から $1+t^{-1}\int_0^t dt'\gamma(\bar{\lambda}(t'))$ にずれたことを意味しており，そのため $\gamma(\lambda)$ は場 ϕ の**異常次元**

(anomalous dimension) と呼ばれる。これに対し，もとの次元 1 は正準次元 (canonical dimension) と称される。(15) は，相互作用の影響がもう 2 箇所に現れていることを示している；(16) 右辺の $e^{-2t}\boldsymbol{m}^2$ となっている質量が $e^{-2t}\overline{m}^2(t)$ に，結合定数 λ が $\overline{\lambda}(t)$ に，それぞれ，置き代わっている。この $e^{-t}\overline{m}(t)$ (または $\overline{m}(t)$) および $\overline{\lambda}(t)$ は，それぞれ，**有効質量** (effective mass)，**有効結合定数** (effective coupling constant) と呼ばれる。そう呼ばれる理由は，(15) が次のことを意味しているからである：系のエネルギー・運動量をある普通の値 $\boldsymbol{p}$ から非常に大きな ($t\to\infty$) [または非常に小さな ($t\to-\infty$)] 値 $e^t\boldsymbol{p}$ にしたとき，そのスケールでの系の頂点関数 $\Gamma^{(n)}(e^t\boldsymbol{p}, m^2, \lambda\,;\,\mu^2)$ (あるいは Green 関数) は，その次元 (正準次元＋異常次元) に応じた全体のスケール変化分を除けば，あたかも系の質量，結合定数が，それぞれ，有効質量 $e^{-t}\overline{m}(t)$，有効結合定数 $\overline{\lambda}(t)$ に変化した理論での，普通の大きさの $\boldsymbol{p}$ での頂点関数 $\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{p}, e^{-2t}\overline{m}^2(t), \overline{\lambda}(t)\,;\,\mu^2)$ (または Green 関数) になるのである。すなわち，$e^{-t}\overline{m}(t), \overline{\lambda}(t)$ は，系のエネルギー・運動量スケールが e^t 倍されたときの，有効的な質量，結合定数なのである。$\overline{m}(t), \overline{\lambda}(t)$ は，t につれて変化する点を強調して，running mass，running coupling constant と呼ばれることもある。

β 関数の零点と $\Gamma^{(n)}$ の漸近的振舞い 上の解 (15) の意味をさらに具体的に見るため，斉次 RGE の係数 $\beta(\lambda)$ を λ の滑らかな関数と仮定し，一例として 8·8 図に示した形をとる場合を考えよう。$\lambda=0$ で $\beta=0$ となるのは当然であるが，その次の零点，$\beta(\lambda_1)=0$ となる点 λ_1，があるとしたのは純粋な仮定である。このとき，有効結合定数 $\overline{\lambda}(t)$ は (6)



8·8 図

$$\frac{d\overline{\lambda}(t)}{dt}=\beta(\overline{\lambda}(t)) \qquad (17)$$

に従って動くから，初めの結合定数 $\lambda=\overline{\lambda}(0)$ が $0<\lambda<\lambda_1$ の範囲にあったとすると，この領域では $\beta>0$ であり $\overline{\lambda}(t)$ は t が大きくなるにつれて単調に増加する。しかし，$\overline{\lambda}(t)$ が零点 λ_1 に近づくにつれ $\beta(\overline{\lambda})$ は小さくなるので，$\overline{\lambda}(t)$ の速度はどんどん遅くなり，$t\to\infty$ に至って初めて $\overline{\lambda}$ は λ_1 に到達する：

$$\lim_{t\to\infty} \bar{\lambda}(t)=\lambda_1 . \tag{18}$$

初めの結合定数 λ が $0<\lambda<\lambda_1$ の領域にある限り，その初めの値 λ の詳細によらず，常に $\bar{\lambda}(t)$ は $t\to\infty$ で λ_1 に近づく，という点が重要である。このような β の零点 λ_1 を紫外固定点 (ultraviolet fixed point) と呼ぶ。逆に $t\to-\infty$ では，この領域の λ に対しては，$\bar{\lambda}$ は 0 に近づき，したがってこの場合の $\lambda=0$ の点は赤外固定点 (infrared fixed point) と呼ばれる。

もし初めの $\lambda=\bar{\lambda}(0)$ が λ_1 より大きく $\beta(\lambda)<0$ の領域にあった場合は，逆に $\bar{\lambda}(t)$ の速度は負であり，$\bar{\lambda}(t)$ は単調に減少し，$t\to\infty$ で (今度は上から) λ_1 に到達する。したがってこの領域の λ に対しても λ_1 は紫外固定点である。λ_1 より大きいところに次の β の零点 λ_2 があれば，この領域の λ に対しては λ_2 が赤外固定点となる。

$0<\lambda<\lambda_1$ の領域にある λ の場合に戻り，$\Gamma^{(n)}$ の紫外極限 ($t\to\infty$) での振舞いを調べよう。この場合 $\bar{\lambda}(t)$ は λ_1 に近づく。簡単のため λ_1 は $\beta(\lambda)$ の 1 位の零点としておこう。このとき，2 乗質量 m^2 の異常次元 $\gamma_m(\lambda)$ は滑らかで，その λ_1 での値 $\gamma_m(\lambda_1)\equiv\gamma_m^\infty$ は -2 より大きいと仮定する。そうすれば，(10) より

$$e^{-2t}\bar{m}^2(t) \underset{t\to\infty}{\sim} e^{-(2+\gamma_m^\infty)t} m^2\times(\text{定数}) \tag{19}$$

すなわち，紫外極限での有効質量 $e^{-2t}\bar{m}^2$ は 0 になる。したがって，$\Gamma^{(n)}$ の紫外領域での漸近形は，解 (15) より，スケール因子を $s\equiv e^t$ と記して

$$\Gamma^{(n)}(s\boldsymbol{p}, m^2, \lambda\,;\,\mu^2) \underset{s\to\infty}{\sim} C^n s^{4-n(1+\gamma^\infty)}\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{p}, m^2=0, \lambda_1\,;\,\mu^2) \tag{20}$$

となる。ただし $\gamma^\infty\equiv\gamma(\lambda_1)$ であり，定数 C は

$$C=\exp\left[\int_0^\infty dt'\,(\gamma^\infty-\gamma(\bar{\lambda}(t')))\right] \tag{21}$$

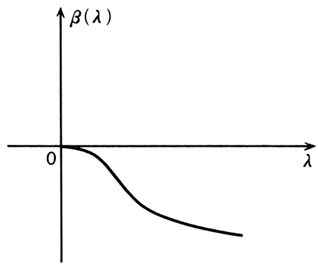
で与えられる†。(20) は，$\Gamma^{(n)}$ の紫外での振舞いが，場 ϕ が次元 $1+\gamma^\infty$ を持つという非常に簡単なスケール則に従うこと，そしてそのスケール因子の掛かる関数が質量 0，結合定数 λ_1 の理論の $\Gamma^{(n)}$ になっていること，を示している。

次に，関数 $\beta(\lambda)$ が，8·9 図に示すように，少なくとも $\lambda=0$ 近傍で負に

---

† (19) の (定数) も，γ を γ_m に置き換えた (21) で与えられる。λ_1 が 1 位の零点のとき，(21) の $\int^\infty dt'$ 積分が収束していることは容易にわかる。λ_1 が 2 位の零点のときは，(21) の $\int^\infty dt'$ は $\int^t dt'$ とすべきで，C は $t=\ln s$ のべきを与えることになる。(下の (25) 参照)

なる場合を考えよう。この場合，出発点での λ が $\beta<0$ の領域にある限り，$\bar{\lambda}(t)$ は $t\to\infty$ で 0 に近づく。すなわち，$\lambda=0$ が紫外固定点となる。これはエネルギーが上がれば上がるほど，自由場の理論に近づくことを意味し，このような性質を持つ理論を**漸近的自由**(asymptotically free) な理論と呼ぶ。



8·9 図

$\beta(\lambda)$ は，その定義 8-2 (32) より必ず λ^2 から始まるので，漸近的自由の場合

$$\beta(\lambda)=-b\lambda^2+O(\lambda^3) \qquad b>0 \tag{22}$$

となって，紫外固定点 $\lambda=0$ は β の 2 位の 0 となる。このため，紫外で自由場理論に近づく近づき方は緩やかで，$\Gamma^{(n)}(e^t\boldsymbol{p})$ の $e^t\to\infty$ の振舞いは自由場のそれに比べてスケール e^t の log の補正を受ける。実際，有効結合定数 $\bar{\lambda}(t)$ は，(22) の β のとき

$$t=\int_\lambda^{\bar{\lambda}(t)}\frac{dx}{\beta(x)}\simeq\int_\lambda^{\bar{\lambda}(t)}\frac{dx}{(-bx^2)}=\frac{1}{b}\left(\frac{1}{\bar{\lambda}(t)}-\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\Longrightarrow\ \bar{\lambda}(t)\simeq\frac{\lambda}{1+b\lambda t}\ \underset{t\to\infty}{\sim}\ \frac{1}{bt} \tag{23}$$

で与えられる。異常次元 $\gamma(\lambda)$，$\gamma_m(\lambda)$ は一般に λ の 1 次から始まり，

$$\gamma(\lambda)=c\lambda+O(\lambda^2), \qquad \gamma_m(\lambda)=c_m\lambda+O(\lambda^2), \tag{24}$$

それゆえ，斉次 RGE の解 (15) において，有効質量 $e^{-2t}\bar{m}^2(t)$ は充分速く 0 になるから 0 にしてよいが，$\Gamma^{(n)}$ の全体にかかる $\gamma(\lambda)$ の寄与は単に $\gamma^\infty=\gamma(0)=0$ とはおかず $\ln e^t$ のべきまで正確に評価する。そうすれば，(15) は，再び $e^t\equiv s$ として，次の漸近形を与える：

$$\Gamma^{(n)}(s\boldsymbol{p},m^2,\lambda\,;\mu^2)\ \underset{s\to\infty}{\sim}\ C'^n s^{4-n}(\ln s)^{-nc/b}\Gamma^{(n)}\left(\boldsymbol{p},0,\frac{1}{b\ln s}\,;\mu\right) \tag{25}$$

ただし，今度の定数 C' は

$$C'=(b\lambda)^{-c/b}\exp\left[\int_0^\infty dt'\,(c\bar{\lambda}(t')-\gamma(\bar{\lambda}(t')))\right]. \tag{26}$$

(25) の右辺の $\Gamma^{(n)}$ は，結合定数 $\bar{\lambda}\equiv1/(b\ln s)$ が小さいので摂動計算で充分よく計算できることに注意しよう。(25) は，この $\bar{\lambda}$ についてのべき展開や，異常次元から来た因子 $(\ln s)^{-nc/b}$ が，自由場の場合の素朴なスケール則 (16) からの log 補正を与えることを示している。

漸近的自由な理論は，高エネルギー極限が摂動論で精度よく計算できるので理論的に大変興味深い。さらに，実験的にも，前に述べたレプトンの核子標的深非弾性散乱における Bjorken スケール則は，強い相互作用が漸近的自由性を持つことを示している。ところが，$\lambda\phi^4$ 理論や QED など通常の理論では，$\beta(\lambda)$ を摂動計算すると初項 λ^2 (QED の場合 λ に相当するのは $\lambda\equiv e^2$) の係数が正となり，漸近的自由とはならない。実際，**非可換ゲージ場を含まない任意のくりこみ可能な理論は漸近的自由でない**ことが証明されている。そして，次に計算してみるように，非可換ゲージ理論は，事実，漸近的自由性を持つ！のである。この事実は，Gross (グロス)-Wilczek (ウィルチェック)，Politzer (ポリィツァ)，'t Hooft 達により，1970 年代初めに，独立に初めて発見された。非可換ゲージ理論の場合，$\lambda\equiv g^2$ (g: ゲージ結合定数) として，上で述べた自由場理論への特定の対数的近づき方が予言されるが，これは，Bjorken スケール則が log の因子で破れているという観測事実とちょうど一致し，QCD が強い相互作用を記述する理論であることに対する確かな証拠の一つとなったのである。

$\lambda\phi^4$ 理論およびゲージ理論での β, γ の摂動計算　まず，一番簡単な $\lambda\phi^4$ 理論で $\beta(\lambda), \gamma_m(\lambda), \gamma(\lambda)$ を摂動の最低次 $O(\hbar)$ で計算してみよう。8-2 (32) ～ (34) の定義で，各くりこみ因子 $Z_i\,(i=3, m, \lambda)$ が $1+\hbar Z_i^{(1)}(\lambda, \Lambda/\mu)+O(\hbar^2)$ の形に計算され，$\lambda=\lambda_0+O(\hbar)$ であるから

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_{\lambda_0,\Lambda}\ln Z_i=-\hbar\left(\frac{\partial Z_i^{(1)}}{\partial\ln\Lambda}\right)_{\lambda,\mu}+O(\hbar^2) \qquad (27)$$

とできることに注意しよう。したがって，各 $Z_i^{(1)}$ の "発散" 部分，$\ln\Lambda$ 比例項，のみを計算すれば充分であり，計算は楽である。

$O(\hbar)$ における波動関数，質量，結合定数，のくりこみ因子 $Z_3^{(1)}, Z_m^{(1)}, Z_\lambda^{(1)}$ は，MIR における相殺項 7-5 (7) ((9), (10), (11)) に†

$$\mathcal{L}^{(1)}_{\rm count.}=\frac{1}{2}Z_3^{(1)}(\partial_\mu\phi)^2-\frac{1}{2}(Z_m^{(1)}+Z_3^{(1)})\,m^2\phi^2$$
$$-\frac{1}{2}(\delta m^2)^{(1)}\,\phi^2-\frac{\lambda}{4!}(Z_\lambda^{(1)}+2Z_3^{(1)})\,\phi^4 \qquad (28)$$

の形で入っていることに注意する。したがって，ϕ の 2 点関数 $\Gamma^{(2)}$ に対する $O(\hbar)$ の寄与は，7-2 の 7・4 図 (b), (c) のグラフからきて

† 7-5 では $O(N)\,\lambda\phi^4$ 模型だから $-(\lambda/8)(\vec{\phi}^2)^2$ の相互作用項としたが，今の単一成分 $\lambda\phi^4$ 模型では $-(\lambda/4!)\,\phi^4$ となっていることに注意。

$$\Gamma^{(2)}_{O(\hbar)}(p^2) = -\frac{\lambda}{2}\int\frac{d^4k}{i(2\pi)^4}\frac{1}{m^2-k^2} + Z_3^{(1)}p^2 - (Z_m^{(1)} + Z_3^{(1)})m^2 - (\delta m^2)^{(1)} \tag{29}$$

となる。第1項の loop 積分を **7-2** (25) でやったように Pauli-Villars 正則化で計算すれば，

$$(29)\text{ 右辺第 1 項} = -\frac{\lambda}{32\pi^2}[(2\ln 2)\Lambda^2 - m^2 - m^2\ln(\Lambda^2/m^2)]. \tag{30}$$

8-2 (27) のくりこみ条件より，$\Gamma^{(2)}(p^2=m^2=0)$，$\Gamma^{(2)}(p^2=0,\ m^2=\mu^2)$，$(\partial/\partial p^2)\Gamma^{(2)}(p^2=0,\ m^2=\mu^2)$ への $O(\hbar)$ の寄与は消えなければならないから，

$$(\delta m^2)^{(1)} = -\frac{\lambda}{32\pi^2}(2\ln 2)\Lambda^2, \tag{31}$$

$$Z_3^{(1)} = 0, \qquad Z_m^{(1)} = \frac{\lambda}{32\pi^2}\left(1 + \ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) \tag{32}$$

と求まり，**8-2** (33), (34) の γ_m, γ の定義より

$$\gamma_m(\lambda) = -\frac{1}{16\pi^2}\lambda + O(\lambda^2), \qquad \gamma(\lambda) = 0 + O(\lambda^2) \tag{33}$$

を得る。2-loop 以上の寄与は λ^2 のオーダーなので $O(\lambda^2)$ と書いた。

$\beta(\lambda)$ を求めるには，$Z_\lambda^{(1)}$ が必要で，**7-2** の 7・7 図 (b) のグラフの効く 4 点頂点関数 $\Gamma^{(4)}$ を計算せねばならない。外線運動量 $\boldsymbol{p}$ を初めから 0 として

$$\Gamma^{(4)}_{O(\hbar)}(\boldsymbol{p}=0)$$
$$= 3\cdot 2\cdot\left(-\frac{\lambda}{4!}\cdot 4\cdot 3\right)^2\int\frac{d^4k}{i(2\pi)^4}\frac{1}{(m^2-k^2)^2} - (Z_\lambda^{(1)} + 2Z_3^{(1)})\lambda. \tag{34}$$

被積分関数を $(m^2-k^2)^{-2} - (\Lambda^2-k^2)^{-2}$ に置き換える正則化で積分を計算し，この寄与 (34) が，$m^2=\mu^2$ のとき 0 になれという (27) の要請より，$Z_3^{(1)}=0$ を用いて

$$Z_\lambda^{(1)} = \frac{3\lambda}{32\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}, \tag{35}$$

したがって，定義式 **8-2** (32) より望みの $\beta(\lambda)$ を得る：

$$\beta(\lambda) = +\frac{3}{16\pi^2}\lambda^2 + O(\lambda^3). \tag{36}$$

λ^2 の係数は確かに正で，漸近的自由でない。

次に非可換ゲージ理論の場合に移ろう。ゲージ群 G は単純群で，物質場としては Dirac 場 ψ のみを含む場合を考える。**7-4** で一般的に証明したことにより，この系は，場，結合定数，ゲージ・パラメータのくりこみ，**7-4**

(15),(17),(20)

$$A^a_{0\mu}=Z_3^{1/2}A^a_\mu,\quad \psi_0=Z_\psi^{1/2}\psi,\quad (c^a_0,\bar{c}^a_0)=\tilde{Z}_3^{1/2}(c^a,\bar{c}^a),$$
$$B^a_0=Z_3^{-1/2}B^a,\quad g_0=Z_1Z_3^{-3/2}g,\quad \alpha_0=Z_3\alpha \tag{37}$$

のみですべての紫外発散をくりこめる。ただし，物質場 ψ も簡単のため零質量としている。(37) を裸の Lagrangian に代入し，tree の $\mathcal{L}$ と相殺項 $\mathcal{L}_{\text{count.}}$ に分離すれば，

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+gf_{abc}A^b_\mu A^c_\nu)^2+\bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu-igT^aA^a_\mu)\psi$$
$$+B^a\partial^\mu A^a_\mu+\frac{\alpha}{2}B^aB^a+i\bar{c}^a\partial^\mu(\partial_\mu c^a+gf_{abc}A^b_\mu c^c), \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{count.}}=&-\frac{1}{4}(Z_3-1)(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu)^2\\&+(Z_\psi-1)\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi+i(\tilde{Z}_3-1)\bar{c}^a\Box c^a\\&-\frac{1}{2}(Z_1-1)gf_{abc}(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu)A^{b\mu}A^{c\nu}\\&+(Z_1Z_3^{-1}Z_\psi-1)gA^a_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu T^a\psi\\&-\frac{1}{4}(Z_1^2Z_3^{-1}-1)g^2(f_{abc}A^b_\mu A^c_\nu)^2\\&+i(Z_1Z_3^{-1}\tilde{Z}_3-1)gf_{abc}\bar{c}^a\partial^\mu(A^b_\mu c^c)\end{aligned} \tag{39}$$

となる。相殺項の中で，g のくりこみ因子 Z_1 が A^3 項のみならず，A^4, $A\bar{\psi}\psi$, $A\bar{c}c$ 項のすべてに現れていることに注意しよう。この共通の因子で，これらの頂点関数のすべての発散を消せるというのは WT 恒等式(ゲージ不変性)のおかげであり，これを利用すれば，Z_1 を求めるのに，ベクトルの足の存在のために計算が面倒になる A^3 頂点関数を考える代わりに，$A\bar{c}c$ (または $A\bar{\psi}\psi$) 頂点関数で済ますことができる。

この系はすべて零質量なので，わざわざ MIR をやらなくとも，Gell-Mann-Low の RGE で充分である。ゲージ理論でも $\lambda\phi^4$ 理論と本質的に同じであるが，ゲージ・パラメータ α も，結合定数 g と同格に扱わねばならないという点だけ注意する。そうすれば，前と同様 $(\mu\partial/\partial\mu)_0\Gamma_0[A_0,\psi_0,c_0;g_0,\alpha_0;\Lambda]=0$ より，

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g,\alpha)\frac{\partial}{\partial g}+\delta(g,\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha}-\gamma(g,\alpha)A^a_\mu\frac{\delta}{\delta A^a_\mu}\right.$$
$$\left.-\gamma_\psi(g,\alpha)\psi\frac{\delta}{\delta\psi}-\tilde{\gamma}(g,\alpha)c^a\frac{\delta}{\delta c^a}\right]\Gamma[A,\psi,c;g,\alpha;\mu]=0 \tag{40}$$

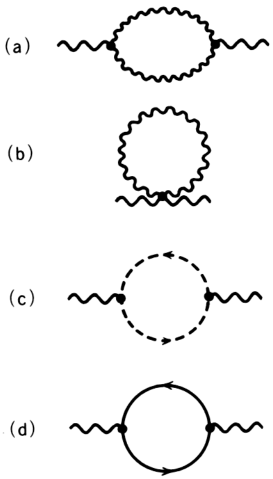
を得る。ただし，ψ で $\psi, \bar{\psi}$ の両方を，c で $c, \bar{c}$ の両方を表すと解し，

$$\beta(g,\alpha)=\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_0 g=-g\mu\frac{\partial \ln(Z_1 Z_3^{-3/2})}{\partial\mu}\bigg|_{g_0,\,\alpha_0,\,\Lambda:\text{固定}},$$

$$\delta(g,\alpha)=\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_0 \alpha=-\alpha\mu\frac{\partial \ln Z_3}{\partial\mu}\bigg|_{g_0,\,\alpha_0,\,\Lambda:\text{固定}}, \qquad (41)$$

$$\gamma_i(g,\alpha)=\frac{1}{2}\mu\frac{\partial \ln Z_i}{\partial\mu}\bigg|_{g_0,\,\alpha_0,\,\Lambda:\text{固定}}$$

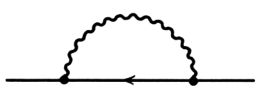
$$[\gamma_i\equiv(\gamma,\gamma_\psi,\tilde{\gamma}) \leftrightarrow Z_i\equiv(Z_3,Z_\psi,\tilde{Z}_3)].$$



8·10 図



8·11 図



8·12 図

さて，まず波動関数のくりこみ因子 $Z_3, \tilde{Z}_3, Z_\psi$ の計算から始めよう。摂動の最低次では，ゲージ場，ゴースト場，Dirac 場の 2 点関数 $\Gamma^{(2)}_{A,c,\psi}$ のそれぞれに対し，8·10 図，8·11 図，8·12 図の Feynman グラフが効く。Feynman グラフの規則は 5-7 表 1 に与えたものを用いる。(27) でも注意したように，我々は $Z_i^{(1)}$ の $\ln\Lambda$ 依存性のみ知れば充分なので，これらのグラフの loop 積分 $\int d^4k/i(2\pi)^4$ を，Pauli-Villars 正則化を使うか，次元正則化† を使うかして，$\ln\Lambda$ 比例項のみを計算する：結果は，

† 次元正則化を使う場合は発散部分，$\bar{\varepsilon}^{-1}=2/(4-n)$ 比例項を取り出し，$\bar{\varepsilon}^{-1}$ を $\ln\Lambda^2$ に置き換える。$\bar{\varepsilon}^{-1} \leftrightarrow \ln\Lambda^2$ の対応は 7-2 (10), (27) の計算でも現れているが，1-loop 計算で一般に正しいことの理由は各自考えられたい。

$$\Gamma_A^{(2)}(8\cdot10\,\text{図})=\frac{g^2}{16\pi^2}(\ln\Lambda^2)\left[\left\{\frac{5}{3}+\frac{1}{2}(1-\alpha)\right\}C_2(G)-\frac{4}{3}T(R)\right]\times(g_{\mu\nu}p^2-p_\mu p_\nu)\delta_{ab}, \tag{42}$$

$$\Gamma_c^{(2)}(8\cdot11\,\text{図})=\frac{g^2}{16\pi^2}(\ln\Lambda^2)C_2(G)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(1-\alpha)\right]ip^2\delta_{ab}, \tag{43}$$

$$\Gamma_\psi^{(2)}(8\cdot12\,\text{図})=\frac{g^2}{16\pi^2}(\ln\Lambda^2)C_2(R)\alpha\not{p}, \tag{44}$$

となる (演習問題 8.3)。ただし，$C_2(G)$ は群 G の随伴表現での 2 次のカシミア演算子の値，

$$\sum_{c,d}f_{acd}f_{bcd}\equiv C_2(G)\delta_{ab} \tag{45}$$

であり，$T(R), C_2(R)$ は Dirac 場 ψ の表現 (R と呼ぶ) での生成子の行列 T^a を用いて次式で定義される“2 種”の 2 次のカシミア演算子の値である：

$$\mathrm{tr}\,(T^aT^b)=T(R)\delta_{ab}, \tag{46}$$
$$\sum_a T^aT^a=C_2(R)1.$$

一般に，G の次元を $\dim G$，表現 R の次元を $\dim R$ と記せば，$T(R)$ と $C_2(R)$ は

$$\dim G\cdot T(R)=\dim R\cdot C_2(R) \tag{47}$$

の関係を持つことが (46) の定義からすぐわかる。R が随伴表現 adj のときは $\dim(\mathrm{adj})=\dim G$ であるから (47) より $T(\mathrm{adj})=C_2(\mathrm{adj})\equiv C_2(G)$ が従う。特に，$G=SU(N)$ で R が基本表現 $\boldsymbol{N}$ のときは，

$$C_2(SU(N))=N,\qquad T(\boldsymbol{N})=\frac{1}{2},\qquad C_2(\boldsymbol{N})=\frac{N^2-1}{2N} \tag{48}$$

である。

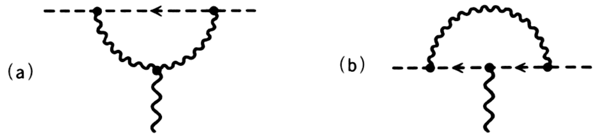
(42)～(44) の発散には，それぞれ，(39) の $\mathcal{L}_{\text{count.}}$ から来る相殺項の寄与

$$-Z_3^{(1)}(g_{\mu\nu}p^2-p_\mu p_\nu)\delta_{ab},\qquad -i\tilde{Z}_3^{(1)}p^2\delta_{ab},\qquad Z_\psi^{(1)}\not{p} \tag{49}$$

が加わり，相殺していなければならない。これから $Z_3^{(1)}, \tilde{Z}_3^{(1)}, Z_\psi^{(1)}$ が

$$Z_3^{(1)}=\frac{g^2}{32\pi^2}(\ln\Lambda^2)\left[\left(\frac{13}{3}-\alpha\right)C_2(G)-\frac{8}{3}T(R)\right],$$
$$\tilde{Z}_3^{(1)}=\frac{g^2}{32\pi^2}(\ln\Lambda^2)\left(\frac{3}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)C_2(G), \tag{50}$$
$$Z_\psi^{(1)}=-\frac{g^2}{16\pi^2}(\ln\Lambda^2)\alpha C_2(R),$$

と決まる。



8·13 図

次に Z_1 を求める必要があるが，これには上述のように反ゴースト・ゴースト・ゲージ場の頂点関数 $\Gamma^{(3)}_{\bar{c}cA}$ を計算するのが一番容易である。$\Gamma^{(3)}_{\bar{c}cA}$ には，摂動の最低次で，8·13 図の 1-loop グラフの寄与と，(39) の相殺項 $\mathcal{L}_{\text{count.}}$ からの寄与がある：

$$\Gamma^{(3)}_{\bar{c}^c c^b A^a_\mu} = (8\cdot 13\,\text{図}) + \tilde{Z}_1^{(1)} g f_{abc}\, p_\mu. \tag{51}$$

ただし，$\tilde{Z}_1 \equiv Z_1 Z_3^{-1} \tilde{Z}_3$ と記し，$\tilde{Z}_1^{(1)}$ はその $\hbar$ 展開の 1 次項である。再び，8·13 図のグラフの発散項のみ評価すれば，$\tilde{Z}_1^{(1)}$ が次のように求まる (演習問題 8.3)：

$$\tilde{Z}_1^{(1)} = Z_1^{(1)} - Z_3^{(1)} + \tilde{Z}_3^{(1)} = -\frac{g^2}{32\pi^2}(\ln \Lambda^2)\, \alpha\, C_2(G). \tag{52}$$

Landau ゲージ $\alpha=0$ のとき，いつも $\tilde{Z}_1^{(n)}=0\ (n\geqq 1)$ となるのは，ゲージ場の伝播関数が横波型 $\propto (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)$ であり，一番外側のゴーストの入ってくる頂点に外線運動量 0 の極限で k_μ となる因子があるからである。

(50), (52) の結果を，β, γ_i の定義式 (41) に代入すれば，((27) を使って)

$$\begin{aligned}\beta(g,\alpha) &= g\left(\frac{\partial}{\partial \ln \Lambda}\right)\left(Z_1^{(1)} - \frac{3}{2} Z_3^{(1)} + O(g^4)\right)\\ &= -\frac{g^3}{16\pi^2}\left[\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} T(R)\right] + O(g^5),\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}\gamma(g,\alpha) &= -\left(\frac{\partial}{\partial \ln \Lambda^2}\right)(Z_3^{(1)} + O(g^4))\\ &= -\frac{g^2}{32\pi^2}\left[\left(\frac{13}{3} - \alpha\right) C_2(G) - \frac{8}{3} T(R)\right] + O(g^4),\\ \tilde{\gamma}(g,\alpha) &= -\frac{g^2}{32\pi^2}\left(\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) C_2(G) + O(g^4),\\ \gamma_\psi(g,\alpha) &= +\frac{g^2}{16\pi^2}\, \alpha\, C_2(R) + O(g^4),\end{aligned} \tag{54}$$

を得る。かくして，$\beta(\lambda)$ の結果 (53) は，非可換ゲージ理論が，確かに

$$\frac{11}{4} C_2(G) > T(R) \tag{55}$$

が満たされる限り，漸近的自由であることを示している。(55) の条件は，物質場 ψ の個数に対してそう強い制限ではない。例えば，$G=SU(N)$ の

とき，ϕ として基本表現 N に属するものが n 種類あるとすると $T(R)=nT(N)$ であるから，(48) の値を用いて，$n<(11/2)N$ であればよい。すなわち，特に $SU(3)_{カラー}$ QCD の場合は，カラー 3 重項のクォークの種類数＝フレーバー数 n_f が 16 個以下であれば満たされる。

スケール不変性に対するアノマリー　斉次 RGE 8-2 (35) において $\beta(\lambda)$ や $\gamma(\lambda)$ が現れていることにより，その解 (15) は，素朴なスケール則 (16) からずれるということを上で述べた。実は，特に零質量の場しか含まない系では，少なくとも古典論の範囲内ではスケール変換に対する不変性があり，対応する Noether カレント保存則から導かれる WT 恒等式はその素朴なスケール則が成立することを主張する。したがって，零でない $\beta(\lambda)$ や $\gamma(\lambda)$ が存在することは，このスケール不変性，すなわち対応するカレント保存則，が量子論レベルであらわに破れることを意味し，アノマリー (anomaly) と呼ばれる現象の一例となっている。

このことを，再び，裸の Lagrangian が $\mathcal{L}_0=(1/2)(\partial_\mu\phi_0)^2-(1/2)m_0^2\phi_0^2-(\lambda_0/4!)\phi_0^4$ で与えられる $\lambda\phi^4$ 理論の例で説明しよう。この系は，もし $m_0=0$ ならば，次元を持つ定数がないので次元を持つ量を測る単位のスケールを変えても不変である。すなわち，座標 x のスケール変換 $x \to x'=e^{-\alpha}x$ に応じて，場 ϕ_0 も同時に

$$\phi_0(x) \longrightarrow \phi_0'(x')=e^{\alpha d}\phi_0(x) \tag{56}$$

を行う。d は ϕ_0 の次元で 1 である†。(56) の変換は dilatation または dilation と呼ばれる。左辺の x' を x に書き換えれば $\phi_0'(x)=e^{\alpha d}\phi_0(e^{\alpha}x)$ となるから，無限小変換 $\delta\phi_0(x)=\phi_0'(x)-\phi_0(x)$ は

$$\delta\phi_0(x)=(d+x^\mu\partial_\mu)\phi_0(x) \tag{57}$$

で与えられる。この変換の下で $\delta\mathcal{L}_0(m_0=0)=\partial_\mu(x^\mu\mathcal{L}_0(m_0=0))$ となるから，対応する Noether カレント j_D^μ は

$$\begin{aligned} j_D^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu\phi_0)}\delta\phi_0-x^\mu\mathcal{L}_0 \\ &= x^\nu[\partial^\mu\phi_0\partial_\nu\phi_0-\delta_\nu^\mu\mathcal{L}_0]+(\partial_\mu\phi_0)\phi_0=x^\nu T_\nu{}^\mu+\frac{1}{2}\partial^\mu(\phi_0^2) \end{aligned} \tag{58}$$

で与えられる。ただし $T_\nu{}^\mu$ は **1-3** (14) で与えた正準エネルギー・運動量テンソルである。質量項 $-(1/2)m_0^2\phi_0^2$ が存在する場合にも j_D^μ はこの式で定義する。そうすれば $T_\nu{}^\mu$ の保存則と運動方程式を用いて

---

† $x'=e^{-\alpha}x$ としたのは，もちろん，x が次元 -1 の量だから。

$$\partial_\mu j^\mu_D = T_\mu{}^\mu + \frac{1}{2}\Box\phi_0^2 = m_0^2\phi_0^2 \equiv 2m_0^2\theta_0 \qquad \left(\theta_0 \equiv \frac{1}{2}\phi_0^2\right) \tag{59}$$

が得られる。$\partial_\mu j^\mu_D$ が“ほとんど”エネルギー・運動量テンソルのトレース $T_\mu{}^\mu$ になっていることに注意しておこう。[**1-3** で注意した Noether カレントの不定性 **1-3** (14) を利用して，j^μ_D, $T_\nu{}^\mu$ を“改善”すれば，事実 $j^\mu_D \equiv x^\nu T_\nu{}^\mu$ が，したがって $\partial_\mu j^\mu_D = T_\mu{}^\mu$ が，成立するようにできる (演習問題 1.4 参照)。]

この dilatation カレント j^μ_D の“保存則”(59) に対応した WT 恒等式は，Green 関数の生成汎関数に対する経路積分表式

$$e^{iW[J]} = \int \mathcal{D}\phi_0 \exp\left[i\int d^4x\,(\mathcal{L}_0 + J\phi_0)\right] \tag{60}$$

において，無限小 dilatation 変換 (57) の局所版 $\phi_0(x) \to \phi_0'(x) = \phi_0(x) + \alpha(x)(d + x^\mu\partial_\mu)\phi_0(x)$ $(\alpha(x) \ll 1)$ と同じ形の積分変数変換から求めるのが，一番簡単で速い。(60) の積分は，もちろん変数変換に対して不変で，積分測度も素朴にやれば不変，$\mathcal{D}\phi_0 = \mathcal{D}\phi_0'$，であるから，(60) の変化分

$$\int \mathcal{D}\phi_0\, i\left\{\int d^4x\,(\partial_\mu\alpha\cdot j^\mu_D + \alpha m_0^2\phi_0^2 + \alpha J(d + x^\mu\partial_\mu)\phi_0)\right\} e^{i\int d^4x(\mathcal{L}_0 + J\phi_0)} \tag{61}$$

は 0 である。これを $J(x)$ で n 回微分して $J=0$ とおき，$\alpha(z)$ の係数を見れば，

$$\begin{aligned}
&\partial^z_\mu \langle 0|\mathrm{T}\, j^\mu_D(z)\,\phi_0(x_1)\,\phi_0(x_2)\cdots\phi_0(x_n)|0\rangle \\
&\quad = 2m_0^2\langle 0|\mathrm{T}\ \theta_0(z)\,\phi_0(x_1)\cdots\phi_0(x_n)|0\rangle \\
&\qquad - i\sum_{r=1}^n \delta^4(z - x_r)\langle 0|\mathrm{T}\,(d + z^\mu\partial^z_\mu)\,\phi_0(z)\,\phi_0(x_1)\cdots\check{\phi}_0(x_r)\cdots\phi_0(x_n)|0\rangle
\end{aligned} \tag{62}$$

を得る。これが望みの Green 関数に対する素朴な WT 恒等式である。特に両辺で $\int d^4z$ 積分を行えば，左辺は全微分だから消え，右辺第 1 項は零運動量の $\theta_0 = (1/2)\phi_0^2$ 演算子を挿入した Green 関数 $G^{(n)}_{\theta_0}$ となり，次の恒等式を与える：

$$i\sum_{r=1}^n \left(d + x^\mu_r \frac{\partial}{\partial x^\mu_r}\right) G^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = 2m_0^2\, G^{(n)}_{\theta_0}(x_1, \cdots, x_n) \tag{63}$$

これはまだ裸の Green 関数であるが，両辺で $\phi_0 = Z_3^{1/2}\phi$ のくりこみを行い，θ_0 に対しても **8-2** (17) のくりこみ $\theta_0 = Z_\theta^{-1}\theta$ を行う。それを頂点関数 $\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{p})$, $\Gamma^{(n)}_\theta(\boldsymbol{p})$ に対する式に書き直せば

$$\left(\sum_{r=1}^{n-1} p_r\cdot\frac{\partial}{\partial p_r}+nd-4\right)\Gamma^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)$$
$$=2m_0^2 Z_\theta^{-1}\Gamma_\theta^{(n)}(0\,;\,p_1,\cdots,p_n) \qquad (64)$$

が得られる。-4 は運動量保存因子 $(2\pi)^4\delta^4(p_1+\cdots+p_n)$ が $\Gamma^{(n)}$ から外されているところからきており，r の和が $n-1$ までなのは独立な運動量が $n-1$ 個だからである。[(63) から (64) を得るには，(63) を，θ_0 の外場項 $K\theta_0$ を加えた場合の生成汎関数 $W[J,K]$ に対する WT 恒等式に書き直し，それを Legendre 変換して求めるのが最も楽である。]

ところが，(64) は実は正しくない。実際，前節で与えた $\Gamma^{(n)}$ に対する CS 方程式 **8-2** (25) は，$\Gamma^{(n)}$ が次元 $4-n$ の量であることを意味する自明な恒等式

$$\left(m\frac{\partial}{\partial m}+\sum_{r=1}^{n-1} p_r\cdot\frac{\partial}{\partial p_r}\right)\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{p},m^2,\lambda)=(4-n)\,\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{p},m^2,\lambda) \quad (65)$$

を用いれば，次の形に書き直せる：

$$\left[\sum_{r=1}^{n-1} p_r\cdot\frac{\partial}{\partial p_r}-\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}+n(1+\gamma(\lambda))-4\right]\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{p},m^2,\lambda)$$
$$=2m^2\alpha(\lambda)\,\Gamma_\theta^{(n)}(0\,;\,\boldsymbol{p},m^2,\lambda) \qquad (66)$$

CS 方程式のこの形 (66) は，素朴な WT 恒等式から出した (64) に比べ，まず $\beta(\lambda)\,\partial/\partial\lambda$ 項があること，そして ϕ の次元 $d=1$ の部分が異常次元だけずれて $1+\gamma(\lambda)$ となっていること，さらに右辺の係数が少し違うこと，の 3 点において異なっている。すなわち，CS 方程式は，$m_0=0$ のときでも **dilatation カレントの保存則 $\partial_\mu j_D^\mu=0$ が量子論において破れている**ことを表している。量子論においては，特殊な例外を除いて†，一般に必ず紫外発散があるので，切断パラメータ Λ もしくはくりこみ点 μ という次元を持つ量を導入せざるを得ず，そのため，古典論において存在したスケール不変性が壊れるのである。CS 方程式の $\beta(\lambda)$ の項は，微分 $\partial/\partial\lambda$ がある複合演算子 O_λ の挿入として理解することができ，$\partial_\mu j_D^\mu=\beta(\lambda)\,O_\lambda$ の形の保存則の破れを，そして $\gamma(\lambda)$ の項は，j_D^0 と ϕ との同時刻交換関係が $[ij_D^0(\boldsymbol{x},t),\phi(\boldsymbol{y},t)]=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})(1+\gamma(\lambda)+x\cdot\partial)\,\phi(\boldsymbol{x},t)$ にずれることを，それぞれ意味している。この dilatation のアノマリーは**トレース・アノマリー**と呼ばれている。

---

† 例えば，$N=4$ 超対称 Yang-Mills 理論は紫外発散を持たず $\beta(\lambda)=0$ であることが知られている。

OPE 係数関数に対する RGE　Wilson の OPE を仮定するなり，摂動論で証明するなりして，いったん OPE

$$A(x+\xi)B(x-\xi)=\sum_i C_i(\xi)O_i(x) \tag{67}$$

を認めれば，係数関数 $C_i(\xi)$ に対するくりこみ群方程式 (RGE) を求めるのは容易である。簡単のため，再び $\lambda\phi^4$ 理論で $A=B=\phi$ の場合を考えよう。その場合，(67) は運動量表示の頂点関数の言葉で次式と同等である：

$$\Gamma^{(n)}_{\phi\phi}\left(\frac{q}{2}+k,\frac{q}{2}-k\,;\,\boldsymbol{p}\right)=\sum_i C_i(k)\,\Gamma^{(n)}_{O_i}(q\,;\,\boldsymbol{p})$$
$$(\boldsymbol{p}\equiv(p_1,p_2,\cdots,p_n)). \tag{68}$$

左辺の $\Gamma^{(n)}_{\phi\phi}$ は，挿入された二つの場 $A=B=\phi$ に付随する 2 点関数の足をもいでいない点を除けば，本質的には $(n+2)$ 点頂点関数 $\Gamma^{(n+2)}$ である。ここで，(68) の右辺に複合演算子 O_i の挿入された頂点関数 $\Gamma^{(n)}_{O_i}$ が現れているので，まず，それに対する RGE を知る必要がある。

我々は，複合演算子が存在する場合にも質量によらないくりこみ，MIR，を採用することにする。この意味は，$O=\phi^4$ を例にとれば，例えば，

$$\Gamma^{(4)}_{\phi^4}(q\,;\,\boldsymbol{p},m^2)|_{q=\boldsymbol{p}=0,\ m^2=\mu^2}=4\,!, \tag{69}$$

$$\Gamma^{(2)}_{\phi^4}(q=0\,;\,p_1=p_2=0,\ \ m^2=0)=0, \tag{70}$$

$$\frac{\partial}{\partial m^2}\Gamma^{(2)}_{\phi^4}(q=0\,;\,p_1=p_2=0,\ \ m^2)|_{m^2=\mu^2}=0, \tag{71}$$

$$\partial^\mu_{p_i}\partial^\nu_{p_j}\Gamma^{(2)}_{\phi^4}(q\,;\,p_1,p_2,m^2)|_{q=\boldsymbol{p}=0,\ m^2=\mu^2}=0, \tag{72}$$

の形のくりこみ条件の組をとって，$\Gamma^{(n)}_{\phi^4}$ を $q,\boldsymbol{p},m^2$ の関数として有限にするということである†。(69)～(72) のくりこみ条件を満たすのに要求される相殺項は，順に，$\phi^4,\phi^2,m^2\phi^2,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi,\phi\Box\phi$ の形の演算子である。[特に，MIR に特徴的な (71) の条件が $m^2\phi^2$ の相殺項を要求する点に注意。] それゆえ，(69)～(72) の条件でくりこまれた ϕ^4 演算子を $(\phi^4)^{\rm ren}_{\mu^2}$ と呼べば，裸の演算子との関係は

$$(\phi^4)^{\rm ren}_{\mu^2}=Z_{44}\,\phi_0^4+Z_{42}\,\phi_0^2+Z_{4m}\,m^2\phi_0^2+Z_{4K}\,\partial_\mu\phi_0\,\partial^\mu\phi_0$$
$$+Z'_{4K}\,\phi_0\Box\phi_0+(Z_{40}1+Z'_{42}m^2+Z'_{44}m^4) \tag{73}$$

で与えられ，どの Z 因子も λ_0,Λ,μ のみの関数で，質量パラメータ m^2 によらない。MIR では，質量パラメータ m^2 は運動量と同等に扱われているの

---

† 正確にいえば，$n=0$ の真空グラフ $\Gamma^{(0)}_{\phi^4}(m^2)$ も 4 次発散するから

$$\Gamma^{(0)}_{\phi^4}(0)=(\partial/\partial m^2)\,\Gamma^{(0)}_{\phi^4}(m^2=0)=(\partial/\partial m^2)^2\,\Gamma^{(0)}_{\phi^4}(m^2=\mu^2)=0$$

のくりこみ条件も置く必要がある。この 3 条件に応じた相殺項が (73) の $1,m^2,m^4$ に比例した後 3 項である。

で，ϕ_0^2 とは“独立”に $m^2\phi_0^2$ が，$\partial_\mu\phi_0\partial^\mu\phi_0, \phi_0\Box\phi_0$ と同様に現れるのである。この点さえ注意すれば，一般の複合演算子のくりこみが，**8-1** (18) と同じ形の

$$(O_i)_{\mu^2}^{\text{ren}} = \sum_{2l+d_j\leq d_i} Z_{ij}^{(l)}(\lambda_0, \Lambda, \mu)\, m^{2l}\, O_j^0 \tag{74}$$

となることは明らかであろう。すなわち $Z_{ij}^{(l)}$ は，$(m^2)^l O_j^0$ の (正準) 次元 $2l+d_j$ が $(O_i)_{\mu^2}^{\text{ren}}$ の次元 d_i 以下の場合だけ 0 でない下三角行列である。$\lambda\phi^4$ 理論の $\phi \to -\phi$ の対称性と Lorentz 不変性とから，$(O_i)_{\mu^2}^{\text{ren}}$ の次元と O_j^0 の次元の偶奇性は一致し，d_i-d_j は必ず偶数となること，したがって $d_{ij}\equiv(d_i-d_j)/2$ が整数であることに注意する。そこで

$$\tilde{Z}_{ij}(\lambda_0, \Lambda, \mu, m^2) \equiv \sum_{l=0}^{d_{ij}} Z_{ij}^{(l)}(\lambda_0, \Lambda, \mu)\, m^{2l} \qquad (d_{ij}\equiv(d_i-d_j)/2) \tag{75}$$

を定義すれば，(74) は簡単に

$$(O_i)_{\mu^2}^{\text{ren}} = \sum_{d_j\leq d_i} \tilde{Z}_{ij}(\lambda_0, \Lambda, \mu, m^2)\, O_j^0 \tag{76}$$

と書ける。$\tilde{Z}_{ij}$ は，(75) の定義より m^2 に関して d_{ij} 次の多項式で，$d_j\leq d_i$ のときのみ 0 でない下三角行列である。重要な点は，$\tilde{Z}_{ij}$ は逆行列 $\tilde{Z}_{ij}^{-1}(\lambda_0, \Lambda, \mu, m^2)$ を持ち，$\tilde{Z}_{ij}^{-1}$ も $\tilde{Z}_{ij}$ 同様，**m^2 について d_{ij} 次の多項式**で，$d_j\leq d_i$ の下三角行列であることである。この事実は，$\{m^{2l}(O_i)_\mu^{\text{ren}}\}$，$\{m^{2l}O_i^0\}$ の形の演算子がそれぞれ完全系であって，(74) と同じ形の式が $(O_i)_\mu^{\text{ren}}$ と O_i^0 を入れ換えても成立する，ということから示せる。

以後 $(O_i)_{\mu^2}^{\text{ren}}$ を単に O_i と書いて，(76) より

$$\Gamma_{O_i}^{(n)}(q\,;\, \boldsymbol{p}, m^2, \lambda\,;\, \mu^2) = \sum_{d_j\leq d_i} \tilde{Z}_{ij} Z_3^{n/2}\, \Gamma_{0O_j^0}^{(n)}(q\,;\, \boldsymbol{p}, m_0^2+\delta m_0^2, \lambda_0\,;\, \Lambda^2). \tag{77}$$

前の演算子挿入のない場合と同様に，m_0, λ_0, Λ を固定した微分 $(\mu\partial/\partial\mu)_0$ を施し，裸の $\Gamma_{0O_j^0}^{(n)}$ が μ に依存しないことを用いて，次式が得られる：

$$(\mathcal{D}-n\gamma(\lambda))\,\Gamma_{O_i}^{(n)} + \sum_{d_j\leq d_i} \tilde{\gamma}_{ij}(\lambda, \mu, m^2)\, \Gamma_{O_j}^{(n)} = 0, \tag{78}$$

$$\mathcal{D} \equiv \mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} - \gamma_m(\lambda)\, m^2\frac{\partial}{\partial m^2}, \tag{79}$$

$$\tilde{\gamma}_{ij}(\lambda, \mu, m^2) \equiv -\sum_k \left(\mu\frac{\partial\tilde{Z}_{ik}}{\partial\mu}\right)_0 \tilde{Z}_{kj}^{-1}. \tag{80}$$

(80) の k にわたる和は $d_j\leq d_k\leq d_i$ の範囲の有限和である。ここでも，再び，(78) が有限な $\Gamma_{O_i}^{(n)}$ に対する方程式である事実から，$\tilde{\gamma}_{ij}$ が切断 Λ に依存できないという論理を用いた。上で注意したように $\tilde{Z}_{ij}$, $\tilde{Z}_{ij}^{-1}$ は m^2 の d_{ij} 次の多項式であるから，(80) で定義される $\tilde{\gamma}_{ij}$ も，m^2 に関して $d_{ik}+d_{kj}$

$=d_{ij}$ 次の多項式である。さらに $\tilde{\gamma}_{ij}$ が次元 $d_i-d_j=2d_{ij}$ の量であることも考慮すれば，$\tilde{\gamma}_{ij}$ は

$$\tilde{\gamma}_{ij}(\lambda,\mu,m^2)=\sum_{l=0}^{d_{ij}}\gamma_{ij}^{(l)}(\lambda)\,\mu^{2(d_{ij}-l)}\,m^{2l} \tag{81}$$

の形を持つことがわかる。(78) が MIR における望みの $\Gamma_{O_i}^{(n)}$ に対する RGE である。この場合，異常次元行列 $\tilde{\gamma}_{ij}$ を通じて次元が d_i 以下のすべての複合演算子 O_j の挿入された $\Gamma_{O_j}^{(n)}$ が混じってくる点が，前の $\Gamma^{(n)}$ の場合と少し異なっている†。

準備が終わったので，OPE の (68) の両辺に (79) の $\mathcal{D}$ を演算してみる；左辺の $\Gamma_{\phi\phi}^{(n)}$ は，$\phi\phi$ のそれぞれの足の 2 点関数 $G^{(2)}\propto(\Gamma^{(2)})^{-1}$ がもいでいないから，$\Gamma_{\phi\phi}^{(n)}\propto(\Gamma^{(2)})^{-2}\Gamma^{(n+2)}$ となり，$\Gamma^{(n)}$ に対する RGE **8-2** (35), $\mathcal{D}\Gamma^{(n)}=n\gamma\Gamma^{(n)}$，を用いれば，

$$\mathcal{D}\Gamma_{\phi\phi}^{(n)}=[-2\times2+(n+2)]\,\gamma(\lambda)\,\Gamma_{\phi\phi}^{(n)}=(n-2)\,\gamma(\lambda)\,\Gamma_{\phi\phi}^{(n)} \tag{82}$$

を満たすことがわかる。したがって，(68) の左辺に $\mathcal{D}$ 演算したものは

$$\mathcal{D}\Gamma_{\phi\phi}^{(n)}=\sum_i(n-2)\,\gamma(\lambda)\,C_i(k)\,\Gamma_{O_i}^{(n)} \tag{83}$$

を与える。他方，(68) 右辺に $\mathcal{D}$ 演算したものは，上で求めた $\Gamma_{O_i}^{(n)}$ に対する RGE (78) を用いて

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\Big(\sum_i C_i\Gamma_{O_i}^{(n)}\Big)&=\sum[(\mathcal{D}C_i)\,\Gamma_{O_i}^{(n)}+C_i\,\mathcal{D}\Gamma_{O_i}^{(n)}]\\&=\sum_i\Big[\mathcal{D}C_i+C_i\,n\gamma(\lambda)-\sum_j C_j\,\tilde{\gamma}_{ji}(\lambda)\Big]\Gamma_{O_i}^{(n)}.\end{aligned} \tag{84}$$

各 $\Gamma_{O_i}^{(n)}$ の独立性により，(83), (84) の $\Gamma_{O_i}^{(n)}$ の係数を等置して

$$(\,\mathcal{D}+2\gamma(\lambda)-\tilde{\gamma}^T(\lambda,\mu,m^2))\,C(k,m^2,\lambda\,;\,\mu^2)=0 \tag{85}$$

を得る。ただし，C は C_i を成分とする列ベクトル，$\tilde{\gamma}^T$ は $\tilde{\gamma}_{ij}$ を成分とする行列 $\tilde{\gamma}$ の転置行列である。

係数関数 $C(k)$ に対する RGE (85) は，各 C_i が次元 $2-d_i$ の量であることから従う自明な関係式

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+2m^2\frac{\partial}{\partial m^2}+k\cdot\frac{\partial}{\partial k}\right)C_i=(2-d_i)\,C_i \tag{86}$$

を用いれば，各 d_i を対角成分とする対角行列を $\tilde{d}$ と記して

---

† また，“質量によらない”くりこみという名に一見反して，MIR のくりこみ群方程式 (78) にはあらわに質量パラメータ m^2 に依存する異常次元行列 $\tilde{\gamma}_{ij}(\lambda,\mu,m^2)$ が現れる。質量によらないのは (74) の $Z_{ij}^{(l)}$ であり，したがって (81) の $\gamma_{ij}^{(l)}(\lambda)$ なのである。この点に関して誤解している文献があるので注意されたい。

$$\left[k\cdot\frac{\partial}{\partial k}-\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}+(2+\gamma_m(\lambda))\,m^2\frac{\partial}{\partial m^2}\right]C$$
$$=[\,2(1+\gamma(\lambda))-(\tilde{d}+\tilde{\gamma}^T(\lambda,\mu,m^2))\,]\,C \tag{87}$$

と書き換えることができる。この方程式の解は，前にやったように，k を $e^{-t}k$ に，λ, m^2 を有効結合定数 $\bar{\lambda}(t)$，有効質量 $e^{-2t}\bar{m}^2(t)$ に置き換えると，左辺の微分演算子が全微分 $-d/dt$ とできることから，容易に次の形で与えられることがわかる：

$$C(e^t k, m^2, \lambda\,;\,\mu^2)$$
$$=\mathrm{T}_{t'}\exp\left\{(2-\tilde{d})\,t+\int_0^t dt'[2\gamma(\bar{\lambda}(t'))-\tilde{\gamma}^T(\bar{\lambda}(t'),\mu,e^{-2t'}\bar{m}^2(t'))]\right\}$$
$$\times C(k, e^{-2t}\bar{m}^2(t), \bar{\lambda}(t)\,;\,\mu^2). \tag{88}$$

右辺の exp は行列の指数関数であり，$\mathrm{T}_{t'}$ は行列の積を時間 t' の順序にとる T 積を表す。この C 全体のスケールを与えている exp の指数部は，(87) の右辺の係数であり，そのうち $2(1+\gamma(\lambda))$ は OPE の左辺の演算子 $A=B=\phi$ の異常次元を含めた full な次元の和 $d_A+d_B=2(1+\gamma(\lambda))$ で，$\tilde{d}+\tilde{\gamma}^T$ は OPE の右辺の複合演算子 $O=(O_i)$ の（行列に一般化された）full な次元

$$d_O=「\text{ 正準次元 }\tilde{d}=\mathrm{diag}(d_i)+\text{異常次元 }\tilde{\gamma}^T」 \tag{89}$$

となっていることに注意したい。それゆえ，(88) は，$C(e^t k)$ が，標記的に書いて，$\sim(e^t)^{d_A+d_B-d_O}$ の振舞いをすることを示しており，Wilson の予想に一致している。

この解 (88) はまた，特に漸近的自由な場の理論では，係数関数 $C(k)$ の k が大きい時の振舞いが，質量が 0 の理論での摂動計算で精度よく求まることを示しており，事実，前にも触れたように QCD での Bjorken スケール則の対数的破れの計算に適用され画期的成功を収めたものである。

演習問題 8.

8.1 質量によらないくりこみを，'t Hooft 流に次元正則化に基づいて行えば，例えば $\lambda\phi^4$ 理論では，**7-5** (17) あたりで説明したように，くりこみ関係式は，切断パラメータ Λ を用いる場合のそれ **8-2** (28), (29) に対応して

$$\Gamma[\phi\,;\,m^2,\lambda\,;\,\mu^2]=\Gamma_0[\phi_0\,;\,m_0^2,\lambda_0\,;\,\varepsilon^{-1}] \qquad (\varepsilon\equiv(4-n)/2\ll 1)$$
$$\phi_0=Z_3^{1/2}\phi, \qquad m_0^2=Z_m m^2, \qquad \lambda_0=Z_\lambda\lambda\mu^{4-n},$$

で与えられる。この場合，切断パラメータ Λ に相当する次元 n は無次元量なの

で，次元を持たない $Z_i(i=3, m, \lambda)$ はくりこみ点 μ にあらわには依存できず

$$Z_i=Z_i(\lambda, n)=1+\frac{a_i^{(1)}(\lambda)}{\varepsilon}+\frac{a_i^{(2)}(\lambda)}{\varepsilon^2}+\cdots$$

の形に決まる。この場合のくりこみ群方程式も **8-2** (31) の斉次 RGE と同じ形となること，そして，そのときの β, γ_m, γ が次式で与えられることを証明せよ。

$$\beta(\lambda)=\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_0\lambda=\lim_{n\to4}(n-4)\lambda\Big/\left(1+\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln Z_\lambda\right)=2\lambda^2\frac{da_\lambda^{(1)}}{d\lambda},$$

$$\gamma_m(\lambda)=-\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_0\ln m^2=\lim_{n\to4}\left(\mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\right)_0\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln Z_m=-2\lambda\frac{da_m^{(1)}}{d\lambda},$$

$$\gamma(\lambda)=-\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_0\ln\phi=\lim_{n\to4}\left(\mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\right)_0\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln Z_3=-\lambda\frac{da_3^{(1)}}{d\lambda}.$$

8.2　Callan-Symanzik 方程式 **8-2** (25) の係数 $\beta(\lambda), \gamma(\lambda)$ を，例えば，$(\partial/\partial p^2)$ $\Gamma_\theta^{(2)}(q=0, p^2)|_{p^2=0}$ および $\Gamma_\theta^{(4)}(q=0,\ \boldsymbol{p}=0)$ で表せ。ただし，$\Gamma^{(n)}, \Gamma_\theta^{(n)}$ のくりこみ条件は **8-2** (2), (19) を採っているとする。

8.3　QCD の Feynman グラフ 8·10 ～ 8·13 図の紫外発散部分を評価して，**8-3** (42), (43), (44), (52) の結果を導け。

8.4　QED においてはくりこみ群方程式の β 関数が常に $\beta\geqq0$ となることが摂動論によらず示せる。これを次の設問に従って示せ。

1）電子と光子の裸の 2 点関数を

$$\int d^4x\ e^{ipx}\langle 0|\mathrm{T}\,\psi_0(x)\,\bar{\psi}_0(0)|0\rangle\equiv Z_2S'_F(p)\equiv\frac{iZ_2}{A(p^2)\not{p}-B(p^2)},$$

$$\int d^4x\ e^{ipx}\langle 0|\mathrm{T}A_{0\mu}(x)A_{0\nu}(0)|0\rangle\equiv Z_3D'_{F\mu\nu}(p)$$

$$\equiv-iZ_3\left[\left(g_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\frac{\pi(p^2)}{p^2}-\alpha\frac{p_\mu p_\nu}{p^4}\right]$$

とし，くりこみ定数 Z_2, Z_3 を Gell-Mann-Low 流のくりこみ条件

$$A(m^2)m-B(m^2)=0,\qquad A(p^2=m^2-\mu^2)=1,\qquad \pi(p^2=-\mu^2)=1$$

で決める。このとき，くりこみ点 μ での有効結合定数 $e(\mu)$ を，この条件でくりこまれた場 $\psi=Z_2^{-1/2}\psi_0$，$A_\mu=Z_3^{-1/2}A_{0\mu}$ の 3 点頂点関数 Γ_ν,

$$\int d^4x\,d^4y\ e^{i(p+k)x}e^{-ipy}\langle 0|\mathrm{T}\ \psi(x)A_\mu(0)\,\bar{\psi}(y)|0\rangle$$

$$=-iD'_{F\mu\nu}(k)S'_F(p+k)\Gamma^\nu(p+k, p\,;\,k)S'_F(p)$$

の，$(p+k)^2=p^2=m^2-\mu^2$，$k^2=-\mu^2$ の点での γ_ν 比例部分の係数として定義する：

$$\Gamma_\nu(p+k, p\,;\,k)\Big|_{\substack{(p+k)^2=p^2=m^2-\mu^2\\ k^2=-\mu^2}}=e(\mu)\gamma_\nu+\cdots.$$

この $e(\mu)$ も，質量殻上結合定数 e と同様，裸の結合定数 e^0 と

$$e(\mu)=Z_3^{1/2}e^0$$

の形の関係でつながっていることを WT 恒等式 **5-7** (18) より導け。

2）場の強さ $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_{0\nu}-\partial_\nu A_{0\mu}$ に対するスペクトル表示

$$\langle 0|[F_{\mu\nu}(x), F_{\rho\sigma}(0)]|0\rangle$$
$$= i\int_0^\infty ds\ \rho(s)(g_{\mu\rho}\partial_\nu^x\partial_\sigma^x - g_{\nu\rho}\partial_\mu^x\partial_\sigma^x - g_{\mu\sigma}\partial_\nu^x\partial_\rho^x + g_{\nu\sigma}\partial_\mu^x\partial_\rho^x)\varDelta(x\,;s)$$

を導け。ただし，スペクトル関数 $\rho(s)$ は次式で定義される：

$$(2\pi)^3\sum_n \delta^4(p_n - q)\langle 0|F_{\mu\nu}(0)|n\rangle\langle n|F_{\rho\sigma}(0)|0\rangle$$
$$= -\theta(q_0)(g_{\mu\rho}q_\nu q_\sigma - g_{\nu\rho}q_\mu q_\sigma - g_{\mu\sigma}q_\nu q_\rho + g_{\nu\sigma}q_\mu q_\rho)\rho(q^2).$$

3） 物理的状態の正定値性を仮定すれば，このスペクトル関数 $\rho(s)$ は $\rho(s) \geqq 0$ であることを示せ。また 1) で定義した光子場のくりこみ定数 Z_3 が，$\rho(s)$ を用いて

$$Z_3 = \int_0^\infty ds\,\frac{\mu^2\rho(s)}{\mu^2 + s} = Z_3^{\text{on-shell}} + \int_{0+}^\infty ds\,\frac{\sigma(s)}{1+\dfrac{s}{\mu^2}}$$

と書けることを示せ。ただし $\rho(s)$ から 1 光子状態の寄与を分離して

$$\rho(s) = Z_3^{\text{on-shell}}\delta(s) + \sigma(s)$$

とした。

4） $\rho(s) \geqq 0$ から，Gell-Mann-Low の β 関数

$$\beta\left(e(\mu), \frac{m}{\mu}\right) = \left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_0 e(\mu) = \frac{1}{2}e(\mu)\,\mu\frac{\partial \ln Z_3}{\partial\mu}$$

が $\beta \geqq 0$ であること，すなわち $e(\mu)$ が単調増加関数であることを言え。またこの $e(\mu)$ は，$\mu \to 0$ および ∞ の極限で，それぞれ質量殻上の結合定数 e と裸のそれ e^0 に一致することを示せ：

$$\lim_{\mu\to 0} e(\mu) = e, \qquad \lim_{\mu\to\infty} e(\mu) = e^0.$$

9. アノマリー

9-1 アノマリーと BRS 対称性

7-4 でゲージ理論のくりこみ可能性を証明したが，その議論ではゲージ不変性を壊さない正則化の方法の存在を仮定していた。しかし，カイラル・フェルミオンが存在してゲージ変換が本質的に γ_5 を含むような理論では，ゲージ不変な正則化法が存在せず，**7-4** の証明が適用できない。実際，このような場合には，古典論 (tree レベル) で存在した対称性が量子論 (loop レベル) で破れるという現象——アノマリーが起こる。ゲージ理論でアノマリーが存在すると，BRS 不変性が loop レベルで壊され，理論のくりこみ可能性およびユニタリー性が成立しなくなる。この節では，アノマリーに関して，くりこみに対する障害としての側面および，その代数的側面を議論する。

ゲージ不変でない正則化　与えられたゲージ理論にそもそもゲージ不変な正則化法が存在しない場合，あるいは存在してもそれを知らない場合は，ゲージ不変性を破る正則化法を用いることになり，**7-4** のような裸の量に対する WT 恒等式に依拠した議論はできなくなる。このような場合，理論のくりこみは次のようにやる：**7-4** と同様，ゲージ固定項部分を除いた有効作用 $\tilde{\Gamma}[\phi_I, c^a, \tilde{K}_I, K_c^a]$，**7-4** (27)，を $\hbar$ 展開で逐次

$$(\tilde{\Gamma})_n \equiv \tilde{\Gamma}^{(0)} + \hbar\Gamma^{(1)} + \cdots + \hbar^n\Gamma^{(n)} \qquad (1)$$

の形で計算していくことを考える。まず，tree レベルの $\tilde{\Gamma}^{(0)}$ は古典的作用 $\tilde{S}$ と同じ，$\tilde{\Gamma}^{(0)} = \tilde{S}$，であるから，明らかに **7-4** (34) の WT 恒等式を満たしている。

$$(\tilde{\Gamma})_0 * (\tilde{\Gamma})_0 = \tilde{S} * \tilde{S} = 0. \qquad (2)$$

次に，この作用 $\tilde{S}$ (の与える相互作用項) に基づき 1-loop グラフを計算する。このとき，もちろん，紫外発散が生ずるが，採用した (ゲージ不変でない) 正則化法を用いて“発散”部分を抜き出し，それらを適当な有限量で置き換える。この置き換えを行う“発散”部分は，正則化法によらず必ず外線運動量について有限次の多項式であり，$\tilde{\Gamma}$ で次元 4 以下の局所的な量である点が重要である。このようにして得られた 1-loop オーダーまでの有効作用 $(\tilde{\Gamma})_1 = \tilde{\Gamma}^{(0)} + \hbar\Gamma^{(1)}$ は

$$(\tilde{\Gamma})_1 * (\tilde{\Gamma})_1 = \hbar^1 2\Delta + O(\hbar^2) \qquad (3)$$

の形の恒等式を満たし，Δ は次元 5 以下の局所的量の積分である。なぜなら，もし理論に紫外発散がなければ，loop 積分変数のシフト等のあらゆる素朴な演算が許され，素朴な WT 恒等式 $(\tilde{\Gamma})_1 * (\tilde{\Gamma})_1 = O(\hbar^2)$ が従うはずであること，したがって，その破れの項 Δ は発散があるゆえに生ずるもので，$(\tilde{\Gamma})_1$ の“発散”部分の有限化に起因するからである。$(\tilde{\Gamma})_1$ の有限化した“発散”部分は次元 4 以下の局所量で，$*$ 演算は次元を 1 (FP ゴースト数 N_{FP} も 1) 上げるから，Δ は，次元 5 以下の $N_{\mathrm{FP}} = +1$ の局所量の積分でなければならない†。大局的ゲージ不変性は明白な線形対称性であるから，今の正則化法でも尊重されていると仮定する。そうすれば Δ は大局的ゲージ不変量である。

ところが，(3) の破れの項 Δ が，作用 $\tilde{S}$ とある局所的汎関数 Y を用いて

$$2\Delta = \tilde{S} * Y \qquad (4)$$

の形に書ける場合がある。このような場合は，$(\tilde{\Gamma})_1$ から $\hbar Y$ を引いた量

$$(\tilde{\Gamma})_1 - \hbar Y = \tilde{S} + \hbar(\Gamma^{(1)} - Y) \qquad (5)$$

を新たに $\hbar^1$ オーダーの有効作用 $(\tilde{\Gamma})_1$ と定義し直せば，(3) ～ (5) より

$$(\tilde{\Gamma})_1 * (\tilde{\Gamma})_1 = O(\hbar^2) \qquad (6)$$

が従い，$O(\hbar^1)$ までで破れのない WT 恒等式が成立することを意味する。(4) の Y は，次元 4 以下の局所量であるから，(5) で $\Gamma^{(1)} - Y$ とした操作は，有限な相殺項 $S^{(1)} \equiv -Y$ を付け加えて，上で“発散”部分を置き換えた有限量をとり直したことを意味する。すなわち，このような場合は，そもそも WT 恒等式 (BRS 不変性) の破れ Δ は，へたな正則化によって人為的に導入されたもので，次元 4 までのくりこみ部分の有限量を調整し直してやれば，破れのない WT 恒等式を満たせる，ということである。もちろ

† この主張の，BPHZ くりこみの枠内における，もっとしっかりした証明も巻末に掲げた文献に与えられている。

ん，再調整の相殺項 $S^{(1)}\equiv -Y$ は，正則化のまずさによって加えられたゲージ不変でない項を相殺するためのものであるから，必ずしも **7-4** のように，ゲージ不変な裸の作用 $\tilde{S}_0$ で Z 因子や v_i をずらして得られる形はしていないし，その必要もないことに注意しておこう。

このようにして，$\hbar$ 展開の各オーダーで，WT 恒等式

$$(\tilde{\Gamma})_n * (\tilde{\Gamma})_n = O(\hbar^{n+1}) \tag{7}$$

が成り立つように，$\Gamma^{(n)}$ のくりこみ部分の正しい有限値を決めてゆくのである。この手続きが $\hbar$ の任意の次数まで続けていければ，理論はくりこみ可能で，かつ WT 恒等式を満たすから BRS 不変であり，ユニタリーな物理的に意味のある理論となる。

このとき，(7) の WT 恒等式は，正則化法のとり方によって任意性の入り得る次元 4 以下の $\Gamma^{(n)}$ のくりこみ部分 (今の手続きで既に有限化された“発散”部分) $\Gamma^{(n)}_{\text{ren.part}}$ がくりこみ方程式 $\tilde{S} * \Gamma^{(n)}_{\text{ren.part}} = 0$ を満たすことを保証しているので，その任意性は **7-4** で証明したように Z 因子や v_i を (有限量) ずらす自由度しかないことに注意したい。それゆえ，WT 恒等式 (7) を満たす限り，この任意部分を別々に選んで構成した二つの Γ は，お互いに有限くりこみでつながる同一の量となる。もちろん，質量や質量殻上の結合定数といった本当の物理的パラメータを違える自由度はあるから，これらを共通にとる限り，という意味である。したがって，これらの Γ は，もしゲージ不変な正則化があったとして，**7-4** のように裸の量に依拠して乗法的にくりこんで得られた Γ とも有限くりこみを除いて一致する。あるくりこみ条件を $\Gamma^{(n)}$ $(n\leqq 4)$ に対し一組選んでくりこんでゆけば，有限くりこみの自由度は完全に固定されるから，共通のくりこみ条件および WT 恒等式 (7) を満たす Γ は，正則化によらず完全に一致する。

くりこみの障害としてのアノマリー　ゲージ不変でない正則化に基づいた上の手続きは，しかし，$\hbar$ のある次数でだめになる場合がある。すなわち，あるオーダー $O(\hbar^n)$ までは WT 恒等式 (7) を成立させることができるが，$O(\hbar^{n+1})$ になったとき，

$$(\tilde{\Gamma})_{n+1} * (\tilde{\Gamma})_{n+1} = \hbar^{n+1} 2\Delta + O(\hbar^{n+2}) \tag{8}$$

で与えられる破れの項 Δ が，もはや $\tilde{S} * Y$ の形に書けない，という場合である。破れの項 Δ の中で $\tilde{S} * Y$ の形に書けるものを自明な破れ，書けないものを**アノマリー**と呼ぶ。$O(\hbar^n)$ までは WT 恒等式を満たしていると仮定したから，このアノマリー Δ も，上述の次元 5 以下等の条件を満たす

局所量の積分で与えられる。(8) で $\hbar^{n+1}$ 項のアノマリー部分をとり出せば

$$\tilde{S}*\Gamma^{(n+1)}_{\text{anom.}}=\varDelta \tag{9}$$

が得られる。これに $\tilde{S}*$ を演算すれば，$\tilde{S}$ のベキ零性 7-4 (45)

$$\tilde{S}*(\tilde{S}*{}^{\forall}X)=0 \tag{10}$$

により左辺は 0 となるから，右辺の $\varDelta$ も

$$\tilde{S}*\varDelta=0 \tag{11}$$

を満たさねばならない。この条件 (11) は，アノマリー $\varDelta$ に対する強い制限を与えるもので，(一般化された) Wess (ヴェス)-Zumino (ズミーノ) 無矛盾性条件 (consistency condition) と呼ばれる。この条件 (11) を満たす解 $\varDelta$ で，自明な解 $\tilde{S}*Y$ の形に書けないものがアノマリーであるが，実は，次に見るように，そのような解の形はほとんど一意的に決まってしまうのである。

Wess-Zumino 無矛盾性条件 (11) は，7-4 (39) のくりこみ方程式 $\tilde{S}*X=0$ と同じ形の方程式であるが，少し違っているのは前の X は FP ゴースト数 $N_{\text{FP}}=0$，次元 4 以下の量であったのに対し，今の場合 $\varDelta$ は $N_{\text{FP}}=+1$ で次元 5 以下の量であるという点である。この違いがあっても，一般解の求め方は前と同じで，要するに，$N_{\text{FP}}=+1$，次元 5 以下の大局的ゲージ不変な局所量の一般形を書き下し，それに $\tilde{S}*$ を掛けて消える条件を求めればよい。まず，BRS 変換量の外場 $\tilde{K}_I=(\tilde{K}^a_\mu, K_i)$，$K^a_c$ を含む項は，適当な (ϕ_I, c^a) のみの関数を付け加えれば，必ず自明な解 $\tilde{S}*Y$ の形になることが，7-4 (48) ～ (57) で用いたのと同じ方法で容易に示せる：例えば，簡単のため，単純群の場合に，ゲージ場とゴースト場の BRS 外場 $\tilde{K}^a_\mu$，K^a_c に関係する部分だけで説明すると，$\varDelta$ の中で，$\tilde{K}^a_\mu$，K^a_c を含む項の一般形は，

$$\int d^4x\ \mathrm{tr}\Big\{\tilde{K}_\mu[\alpha_1(\partial^\mu C)C+\alpha_2 C(\partial^\mu C)+\beta_1 igA^\mu C^2 + \beta_2 igC^2A^\mu+\beta_3 igCA^\mu C]+\gamma igK_cC^3\Big\} \tag{12}$$

である†。ただし $\tilde{K}_\mu\equiv\sum_a \tilde{K}^a_\mu T^a$，$C\equiv\sum_a c^a T^a$ などの行列記法を用いた。この形 (12) に $\tilde{S}*$ を演算すれば，条件 (11) より少なくとも $\tilde{K}^a_\mu, K^a_c$ を含む部分は消えなければならない。まず K^a_c 比例部分が消える条件から $\gamma=0$ が従い，次に $\tilde{K}^a_\mu$ 比例部分が消える要求から，$\beta_1=-\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2$，$\beta_3=0$ が導かれる。ところが，$*$演算の定義 7-4 (31) より

† 一般の線形ゲージでは f^a_i を含む項があり得るが簡単のため $f^a_i=0$ のゲージを考える。$f^a_i\neq0$ でも同じ結論が成り立つ。

$$\begin{aligned}\tilde{S}*[\mathrm{tr}(\tilde{K}_\mu A^\mu C)] &= -\mathrm{tr}[\tilde{K}_\mu(\partial^\mu C\cdot C - igA^\mu C^2)] + f(A_\mu^a, c^a),\\ \tilde{S}*[\mathrm{tr}(\tilde{K}_\mu C A^\mu)] &= -\mathrm{tr}[\tilde{K}_\mu(C\partial^\mu C + igC^2A^\mu)] + f'(A_\mu^a, c^a),\end{aligned} \tag{13}$$

(f, f' は K を含まぬ A_μ^a, c^a のみの関数) の等式が成り立つから，このような係数 $\beta_1=-\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2$，$\beta_3=\gamma=0$ を持つ (12) は，ちょうど，

$$\tilde{S}*\left[\int d^4x\,\mathrm{tr}\,\{\tilde{K}_\mu(-\alpha_1 A^\mu C-\alpha_2 CA^\mu)\}\right]+(A_\mu^a, c^a \text{ のみの関数}) \tag{14}$$

の形に書け，適当な (ϕ_I, c^a) のみの関数を加えれば自明な解 $\tilde{S}*Y$ となることが示せた。

したがって，自明でない真の破れ＝アノマリー $\varDelta$ は，$\phi_I=(A_\mu^a, \varphi_i)$, c^a のみの関数であることになり，$N_{\mathrm{FP}}=+1$ と局所性から次の形に書ける。

$$\varDelta=\int d^4x\ \mathcal{a}(\phi_I, c^a)=\int d^4x\ c^a\,\mathcal{a}'^a(\phi_I) \tag{15}$$

ϕ_I, c^a のみの関数に対しては $\tilde{S}*$ の演算は BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}$ と同じであるから，結局 $\int d^4x\ \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\,\mathcal{a}(\phi_I, c^a)=0$ の解を探せばよいことになる。コンパクトなゲージ群 G は一般に単純群または $U(1)$ 群である因子群 G_α の直積に分解される

$$G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_n \qquad G_\alpha\text{：単純群または } U(1)\text{ 群} \tag{16}$$

ので，(15) の $c^a, \mathcal{a}'^a$ の添字 a に関する縮約は，それぞれの因子群 G_α 上のみにわたる和に制限してもよく，(15) は因子群 G_α ごとに独立な BRS 不変量となる。以下で必要な場合は，行列記法を用いるが，(16) のような一般の群 G の場合，各因子群 G_α ごとに独立な結合定数 g_α が存在することを考慮し，各 G_α セクターのゲージ場 $A_\mu^{(\alpha)}$，ゴースト場 $C_{(\alpha)}$ を，その g_α と負の虚数単位 $-i$ とを含めて

$$\begin{aligned}A_\mu^{(\alpha)} &\equiv -ig_\alpha\sum_{a\in G_\alpha}A_\mu^a T^a,\\ C_{(\alpha)} &\equiv -ig_\alpha\sum_{a\in G_\alpha}c^a T^a\end{aligned} \tag{17}$$

と定義しておくと便利である。このとき BRS 変換は，g_α によらない形

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}A_\mu^{(\alpha)} &= \partial_\mu C_{(\alpha)}+[A_\mu^{(\alpha)}, C_{(\alpha)}],\\ \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}C_{(\alpha)} &= -C_{(\alpha)}^2,\end{aligned} \tag{18}$$

となる。[話の明確のため，(17) で用いた T^a は，各 G_α セクターで基本表現となっている表現での，生成子の表現行列としておこう。]

$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\varDelta=0$ がどのような解を許すかに関しては，(15) の添字 a の縮約和が，$G_\alpha=U(1)$ 上の場合か G_α＝単純群 の場合か，で別々の考察が必要で

ある。

（1） $G_\alpha=U(1)$ の場合： この因子群 $U(1)$ の一意的ゴースト場を $c^{U(1)\alpha}$ と呼べば，それは BRS 不変であるから，$f_{\text{ゲージ不変}}(\phi_I)$ を次元 4 以下の任意のゲージ不変関数とすれば

$$\Delta=\int d^4x\, c^{U(1)\alpha} f_{\text{ゲージ不変}}(\phi_I) \tag{19}$$

の形の Δ が Wess-Zumino 条件 (11) を満たし，アノマリーの候補となる。しかし，このような物質場も含んだ一般的な形のアノマリーは実は見出されておらず，知られている例は $f_{\text{ゲージ不変}}$ がゲージ場だけで与えられる場合のみである。これについては後で述べる。

（2） $G_\alpha=$単純群 の場合： この場合のアノマリー (15) の被積分関数 $\mathcal{A}$ は (17) の行列記法を用いて†，

$$\mathcal{A}=\mathrm{tr}[C_{(\alpha)}\mathcal{A}'(\phi_I)], \qquad (\mathcal{A}'\equiv\sum_{a\in G_\alpha}\mathcal{A}'^a T^a) \tag{20}$$

と書かれる。この量はゴースト数 $N_{\mathrm{FP}}=+1$ の量である。ところが，我々は既に **5-10** (22) ～ (24) で述べた定理から，単純群の場合，$N_{\mathrm{FP}}=+1$ を持つ非自明な局所的 BRS 不変量は存在しないことを知っている。しかしこれは (15) のアノマリーが存在しないことを意味しない。アノマリー Δ の満たすべき条件は $\mathcal{A}$ の**積分** $\int d^4x\, \mathcal{A}$ が BRS 不変であればよいので

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\mathcal{A}=\partial_\mu\mathcal{B}^\mu \qquad \mathcal{B}^\mu\text{：あるベクトル量} \tag{21}$$

のように (Lorentz 不変な) 全微分の変化を受けてもかまわない。

これよりしばらく，(21) を満たす非自明な解 $\mathcal{A}$ の一般形を求める仕事に専念する。この条件 (21) を分析するため，まず，(20) の BRS 変換を行えば

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\mathcal{A}=\mathrm{tr}[-C_{(\alpha)}^2\mathcal{A}'-C_{(\alpha)}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\mathcal{A}']. \tag{22}$$

ゲージ場と物質場 $\phi_I=(A_\mu^a,\varphi_i)$ (およびその微分) の BRS 変換は，$\partial_\mu c^a$ (や，そのより高階の微分) に比例する部分を除けば，c^a を角度パラメータとする大局的ゲージ変換 (カラー回転) と同じであるから，ϕ_I のみの関数 $\mathcal{A}'(\phi_I)$ の BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\mathcal{A}'$ は一般に

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\mathcal{A}'=[\mathcal{A}',C_{(\alpha)}]-(\partial_\mu C_{(\alpha)}\text{ 比例項}) \tag{23}$$

の形をとる。それゆえ，(23) を (22) に代入して

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\mathcal{A}=\mathrm{tr}[C_{(\alpha)}^2\mathcal{A}'+C_{(\alpha)}(\partial_\mu C_{(\alpha)}\text{ 比例項})] \tag{24}$$

† $\mathcal{A}'$ の規格化を適当に変更した。

となる†。ただし，トレースの巡回対称性とゴーストの反可換性を用いた。(24) の形を眺めれば，これが何かの量の全微分 $\partial_\mu \mathcal{B}^\mu$ の形となるためには，まず，i) 第 1 項 $\mathrm{tr}(C_{(\alpha)}^2 \mathcal{A}')$ は微分を受けていない $C_{(\alpha)}^2$ 因子を持つので，$\partial_\mu C_{(\alpha)}$ 因子を含む第 2 項から必ず $\mathrm{tr}[\partial_\mu(C_{(\alpha)}^2)\cdot {}^\exists X^\mu]$ の形の項が供給されねばならない。しかも，このことは同時に $\mathcal{A}'$ 自身が

$$\mathcal{A}' = \partial_\mu X^\mu \tag{25}$$

のように全微分の形になっていなければならないことを意味する。さらに，ii) $\partial_\mu C_{(\alpha)}$ 因子を含む第 2 項自体は，この寄与以外に，それ自体で全微分項となる項を含んでいてよい。これら i), ii) のタイプの寄与を (24) の第 2 項が与えるためには，(23) の ($\partial_\mu C_{(\alpha)}$ 比例項) は，i), ii) に応じて次の二つの形の項を含むことを意味する：

$$-(\partial_\mu C_{(\alpha)} \text{ 比例項}) = [X^\mu, \partial_\mu C_{(\alpha)}] + \partial_\mu [F^\mu(\partial C_{(\alpha)}, \phi_I)]. \tag{26}$$

ただし，F^μ は $\mathrm{tr}(C_{(\alpha)}\partial_\mu F^\mu)$ 自体が全微分となるという要請により

$$\mathrm{tr}(\partial_\mu C_{(\alpha)}\cdot F^\mu) = 0 \tag{27}$$

の性質を持つものである。このような F^μ の例としては，

$$F^\mu = M\cdot\partial^\mu C_{(\alpha)}\cdot M, \qquad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M_\nu \partial_\rho C_{(\alpha)} M_\sigma \tag{28}$$

[M, M_μ は ϕ_I の関数で G_α の随伴表現行列] などがある。もちろん $F^\mu=0$ でもよい。

以上をまとめると結局，$\boldsymbol{\delta}_\mathrm{B}\mathcal{A}$ が全微分になるためには

$$\mathcal{A} = \mathrm{tr}[C_{(\alpha)}\partial_\mu X^\mu(\phi_I)] \tag{29}$$

の形であり，X^μ の BRS 変換則は，(23), (25), (26) より

$$\partial_\mu(\boldsymbol{\delta}_\mathrm{B} X^\mu) = \partial_\mu([X^\mu, C_{(\alpha)}] + F^\mu) \tag{30}$$

の形で F^μ は (27) を満たすものでなければならない，ということである。(30) から ∂_μ を外せば

$$\boldsymbol{\delta}_\mathrm{B} X^\mu = [X^\mu, C_{(\alpha)}] + F^\mu + \partial_\nu f^{[\mu\nu]} \tag{31}$$

($f^{[\mu\nu]}$ はある反対称テンソル) を意味する。もしも (31) の第 2 項・第 3 項が 0 であるなら，$X^\mu(\phi_I)$ はゲージ変換の下で共変な量であることを意味する。しかし，そのような共変量の場合には，実は，(29) の積分は自明な形 $\tilde{S} * Y$ となり，真のアノマリーを与えない；実際

---

† (23) の第 1 項を代入したものが，(22) の第 1 項の -2 倍となり，相殺し損なうことに注意。これはゴースト場の BRS 変換が，通常の ϕ_I の受ける回転角の半分のカラー回転になっている事実による。

$$\Delta=\int d^4x\,\mathrm{tr}[C_{(\alpha)}\partial_\mu X^\mu]=\int d^4x\,\mathrm{tr}[-(\partial_\mu C_{(\alpha)})X^\mu]$$
$$=\int d^4x\,\mathrm{tr}\Big\{-(\partial_\mu C_{(\alpha)}+[A_\mu^{(\alpha)},C_{(\alpha)}])X^\mu-A_\mu^{(\alpha)}[X^\mu,C_{(\alpha)}]\Big\}$$
$$=\int d^4x\,\mathrm{tr}\Big\{\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}(-A_\mu^{(\alpha)}X^\mu)\Big\}=\tilde{S}*\Big[\int d^4x\,\mathrm{tr}(-A_\mu^{(\alpha)}X^\mu)\Big]. \quad (32)$$

したがって，真のアノマリーが現れるのは，$X^\mu(\phi_I)$ が共変量でないときのみ，すなわち，(31) の右辺の第 2・第 3 項の少なくとも一つが 0 でないときのみである。このことからすぐに，$X^\mu(\phi_I)$ は物質場を含まず，ゲージ場のみの関数であることがわかる。なぜなら，まず，a が次元 5 以下だから X^μ は次元 3 以下であることに注意する。物質場で (行列記法の) 随伴表現のベクトル X^μ をつくろうとすると，フェルミオン場なら $\sum_a T^a(\bar{\psi}T^a\gamma^\mu\psi)$ しかあり得ず，共変量になってしまう。スカラー場なら，$\sum_a T^a(\varphi^\dagger T^a\overleftrightarrow{\partial}^\mu\varphi)\equiv X_1^\mu$，$\sum_a T^a\partial^\mu(\varphi^\dagger T^a\varphi)\equiv X_2^\mu$，および A_μ を含んだ $\sum_a T^a(\varphi^\dagger T^a D_\mu\varphi)\equiv X_3^\mu$，$\sum_a T^a(D_\mu\varphi^\dagger\cdot T^a\varphi)\equiv X_4^\mu$ (D_μ：共変微分) の四つがすべての可能性であるが，X_3^μ, X_4^μ は共変量であり，まず，除外される。X_1^μ は (27) を満たす F^μ を持つ BRS 変換 (31) を実現しているけれど，$\mathrm{tr}[-\partial_\mu C_{(\alpha)}\cdot X_1^\mu]\propto\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}[\varphi^\dagger A_\mu^{(\alpha)}\partial_\mu\varphi-\partial_\mu\varphi^\dagger\cdot A_\mu^{(\alpha)}\varphi+\varphi^\dagger(A_\mu^{(\alpha)})^2\varphi]$ が成立し自明な破れしか導かず，X_2^μ は $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}X_2^\mu$ がそもそも (27) を満たす F^μ を与えない。

したがって X^μ はゲージ場のみから成る次元 3 以下の量である。ゲージ場や微分は次元 1 のベクトル量であるから，X^μ をつくるには，$A^\mu A^\rho A_\rho$，$A^\mu\partial_\rho A^\rho$ のように脚を一対縮約してつくる可能性と，$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu A_\rho A_\sigma$，$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu\partial_\rho A_\sigma$ のように $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ を使う可能性の 2 通りがある。しかし，前者の可能性は，あらゆる場合を調べることにより，すべて自明な破れ $\tilde{S}*Y$ しか導かないことが確かめられる (演習問題 9.1)。したがって自明でないアノマリーの可能性は，X^μ が $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ に比例している場合のみで，そのような X^μ の一般形は

$$\begin{aligned}X^\mu=\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\{&x_\beta A_\nu^{(\alpha)}\partial_\rho A_\sigma^{U(1)\beta}+x'_\beta(\partial_\nu A_\rho^{(\alpha)})A_\sigma^{U(1)\beta}\\&+y_\beta A_\nu^{(\alpha)}A_\rho^{(\alpha)}A_\sigma^{U(1)\beta}+y'_{\beta\gamma}A_\nu^{(\alpha)}A_\rho^{U(1)\beta}A_\sigma^{U(1)\gamma}\\&+zA_\nu^{(\alpha)}\partial_\rho A_\sigma^{(\alpha)}+z'(\partial_\nu A_\rho^{(\alpha)})A_\sigma^{(\alpha)}+wA_\nu^{(\alpha)}A_\rho^{(\alpha)}A_\sigma^{(\alpha)}\}\end{aligned} \quad (33)$$

で与えられる。ここで $A_\mu^{U(1)\beta}$ は G の中の $U(1)$ 因子群 G_β に対応するゲージ場 (行列でなく 1 成分の場) を表し，x, x', y, y', z, z', w は定数の係数で

ある。G_α の Lie 代数 $\mathcal{G}_\alpha$ に属する行列 $A_\mu^{(\alpha)}$ の2個以上の積は必ずしも $\mathcal{G}_\alpha$ に属さないから，(33) 中のそのタイプの項には正確には $\mathcal{G}_\alpha$ への射影演算が必要で，そのように理解しておく。[しかし，これを忘れても，どのみちアノマリー $\mathcal{a}=\mathrm{tr}[C_{(\alpha)}\partial_\mu X^\mu]$ にはその成分しか効かない。] この一般形 (33) の X^μ の BRS 変換の計算は簡単で，ゴースト場 C の微分なしの部分は明らかに共変な $[X^\mu, C]$ の形にまとまるから，微分を受けた ∂C を含む項のみを拾い出せばよい。この結果の $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}X^\mu$ が (31) の形になるべしと要請すれば，容易に，係数に対する条件が求まる：

$$y_\beta=y'_{\beta\gamma}=0, \qquad z=z'=w. \tag{34}$$

x_β, x'_β や z 自体は任意でよいことがわかる。このとき，実際 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}X^\mu$ は (31) の形となり，そこでの F^μ や $\partial_\nu f^{[\mu\nu]}$ は次の量となる：

$$F^\mu=\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(x'_\beta[A_\rho^{(\alpha)}, \partial_\nu C_{(\alpha)}]A_\sigma^{U(1)\beta}-zA_\nu^{(\alpha)}\partial_\rho C_{(\alpha)}A_\sigma^{(\alpha)}) \tag{35}$$

$$\partial_\nu f^{[\mu\nu]}=\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\{x_\beta\partial_\nu C_{(\alpha)}\partial_\rho A_\sigma^{U(1)\beta}+x'_\beta\partial_\nu A_\rho^{(\alpha)}\partial_\sigma C^{U(1)\beta}$$
$$+z(\partial_\nu C_{(\alpha)}\partial_\rho A_\sigma^{(\alpha)}+\partial_\nu A_\rho^{(\alpha)}\partial_\sigma C_{(\alpha)})\}. \tag{36}$$

[(35) の F^μ は確かに要求される性質 (27) を満たしている。]

(33), (34) を (29) に代入し，任意係数の $x_\beta+x'_\beta, z$ をそれぞれ $\alpha_\beta, \alpha/2$ と呼び直して，結局，単純因子群 G_α 部分のアノマリーは

$$\mathcal{a}=\alpha_\beta\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}[C_{(\alpha)}\partial_\mu A_\nu^{(\alpha)}]\partial_\rho A_\sigma^{U(1)\beta}$$
$$+\alpha\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\left[C_{(\alpha)}\partial_\mu\left(A_\nu^{(\alpha)}\partial_\rho A_\sigma^{(\alpha)}+\frac{1}{2}A_\nu^{(\alpha)}A_\rho^{(\alpha)}A_\sigma^{(\alpha)}\right)\right] \tag{37}$$

の形しかないことが結論される。もちろん，この形の一意性というのは，自明な BRS 不変量 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}(Y)$ を加える任意性を除いて，という意味である。

アノマリーの代数的側面　かくして，我々は Wess-Zumino 無矛盾性条件 (11), あるいは (21) をかなり初等的な方法で解いてアノマリーの形 (37) を見出した。この解 (37) 自体は，しかし，以下に示すようなもっとエレガントな代数的方法で容易に見付けることができる。この方法は，Wess-Zumino 条件の一つの非自明解を与えるだけで，決して上の議論のようにそれしか解がないという証明を与えるものではないが，任意の高次元時空の場合にも適用できる点や，後で議論するアノマリーの位相幾何学的意味付けともつながる点など，有用でかつ深い意味を持っている。

このため，(外) 微分形式† を用いるのが便利である。微分形式では，ゲ

† 付録 E の解説参照。ただし，この節では wedge 積 $dx^\mu\wedge dx^\nu$ などは，$\wedge$ の記号を略して $dx^\mu dx^\nu$ などと記す。

ージ場 A_μ および場の強さ $F_{\mu\nu}$ は，Lie 代数 $\mathcal{G}$ の元（行列記法）であると同時に，それぞれ 1-form および 2-form である：

$$A \equiv -ig\sum_a A_\mu^a T^a dx^\mu = A_\mu dx^\mu \tag{38}$$

$$F \equiv dA + A^2 = \frac{1}{2}(-ig)\sum_a F_{\mu\nu}^a T^a dx^\mu dx^\nu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{39}$$

[G が単純群でない場合に，その（単純群または $U(1)$ 群である）因子群 G_α 部分を指定する必要のあるときは，前の行列記法 (17) と同様に，$A^{(\alpha)}$ または $A^{U(1)\alpha}$ などと記す。] FP ゴースト場や BRS 変換をこの枠組の中に自然な形で入れるために，ここで，いわゆる**超場型式** (superfield formalism) を手短に導入しよう†。今，4 次元時空 x^μ に，もう一つ Grassmann 数 θ の座標を付け加えた 4+1 次元超空間 $x^M \equiv (x^\mu, \theta)$ を考え，ゲージ場 A もその超空間上の接続場 $\mathcal{A}$ として拡張する：

$$\mathcal{A} \equiv A_M(x, \theta)\, dx^M = A_\mu(x, \theta)\, dx^\mu + A_\theta(x, \theta)\, d\theta. \tag{40}$$

ここで新たに現れた θ 方向のゲージ場成分 A_θ を FP ゴースト場とみなし

$$A_\theta \equiv -ig\sum_a c^a T^a = C, \qquad C_1 \equiv C d\theta \tag{41}$$

$$\mathcal{A} = A + C_1, \qquad (A \equiv A_\mu dx^\mu) \tag{42}$$

と書く。C_1 の添字 1 は 1-form を表し，行列記法の C と区別した。(ここの A は，(38) の A と同じ記号を使っているが，超空間 (x^μ, θ) 上に拡張された場——超場——である。) 外微分演算子 d も超空間上に拡張して

$$\begin{aligned} &\tilde{d} = d + \delta, \\ &\tilde{d} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^M}\right) dx^M, \qquad d \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) dx^\mu, \qquad \delta \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) d\theta, \end{aligned} \tag{43}$$

$$\tilde{d}^2 = d^2 = \delta^2 = d\delta + \delta d = 0, \tag{44}$$

と定義する。これと無矛盾な 1-form $dx^M = (dx^\mu, d\theta)$ の交換関係は

$$\begin{aligned} &dx^M dx^N = -(-)^{|M||N|} dx^N dx^M, \\ &(x^M, \partial_M)\, dx^N = (-)^{|M||N|} dx^N (x^M, \partial_M) \end{aligned} \tag{45}$$

($|M|$ は x^M が θ のとき 1 で x^μ のときは 0) で，特に，$d\theta d\theta \neq 0$ である。これらの定義の下で，ゲージ場 $\mathcal{A}$ に対応した場の強さ $\mathcal{F}$ は，もちろん

$$\mathcal{F} \equiv \tilde{d}\mathcal{A} + \mathcal{A}^2 \equiv -\frac{1}{2} F_{NM}(x, \theta)\, dx^M dx^N \tag{46}$$

---

† Bonora (ボノーラ) と Tonin (トーニン) により与えられた超場型式は，Grassmann 座標として $\theta, \bar{\theta}$ の二つを加えたもので，ゴースト場・反ゴースト場，BRS 変換・反 BRS 変換が対称に扱える美しいものであるが，$\bar{\theta}$ はここでは必要がないので省略しておく。(演習問題 9.3 参照)

で定義される。

超場 $A_\mu(x,\theta), C(x,\theta)$ は，$\theta=0$ では，もとの 4 次元のゲージ場 $A_\mu(x)$ とゴースト場 $C(x)$ に一致するものと考える。しかし，人為的に導入した θ 座標への依存性を決めるために，ここで，θ 方向には曲率が零である，という要請

$$\begin{aligned} F_{\mu\theta} &= \partial_\mu A_\theta - \partial_\theta A_\mu + [A_\mu, A_\theta] = 0 \\ F_{\theta\theta} &= 2\partial_\theta A_\theta + \{A_\theta, A_\theta\} = 0 \end{aligned} \tag{47}$$

をおく。すなわち，(46) の場の強さ $\mathcal{F}$ が

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(x,\theta)\, dx^\mu dx^\nu = F \tag{48}$$

になれという要請である。これは，水平性条件 (horizontality condition) と呼ばれるが，$\theta=0$ で通常の 4 次元場に一致するという境界条件で (47) を解けば，(θ^2 以降は 0 だから)

$$\begin{aligned} A_\mu(x,\theta) &= A_\mu(x) + \theta\, D_\mu C(x), \qquad (D_\mu C \equiv \partial_\mu C + [A_\mu, C]) \\ A_\theta(x,\theta) &= C(x) + \theta(-C^2(x)), \end{aligned} \tag{49}$$

と決まる。この形 (49) から明らかに，場の θ 方向の**微分 $\boldsymbol{\partial_\theta}$ はちょうど BRS 変換に一致している**ことがわかる。すなわち，θ 方向の外微分演算子 $\delta = (\partial/\partial\theta)\, d\theta$ は $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}} \cdot d\theta$ の演算であり，

$$\begin{aligned} \delta A &= -(\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}} A_\mu)\, dx^\mu d\theta = -dC_1 - AC_1 - C_1 A \\ \delta C_1 &= -(\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}} C)\, d\theta d\theta = -C_1{}^2 \end{aligned} \tag{50}$$

が従う。($C_1 = C d\theta$ および，$d\theta, \theta$ が C と反可換であることに注意。) 実際，この関係式自体は，水平性条件 (48) を，$\mathcal{F}, \mathcal{A}, \tilde{d}$ の定義式 (46), (42), (43) を用いて

$$(d+\delta)(A+C_1) + (A+C_1)^2 = dA + A^2 \tag{51}$$

と書き直し，両辺を比較すれば，直接導けた式に他ならない。この超場型式の利点は，FP ゴースト場に接続としての意味付けを与えると共に，BRS 変換を水平性条件という簡明な“幾何学的”条件に書き直した点にある。

後で使う必要上，ここで一つ注意をしておく。上では余分に導入した 1 次元座標を Grassmann 数 θ としたが，そうしないで普通の c 数パラメータ t とする場合も有用である。[この場合は，もちろん A_θ は普通の c 数量で，もはやゴースト場とは無関係になり，($dt\,dt=0$ ゆえ) $F_{\theta\theta}$ 成分も存在しない。] この場合，

$$A_\mu(x,t)\, dx^\mu = g^{-1}(x,t)\, dg(x,t) + g^{-1}(x,t)\, A(x)\, g(x,t) \tag{52}$$

$$A_\theta(x,t)\, dt = g^{-1}(x,t)\, \delta g(x,t) \equiv v(x,t) \tag{53}$$

として t 依存性を決める。$A(x)=A_\mu(x)\,dx^\mu$ はもとの 4 次元のゲージ場で，$\delta=(\partial/\partial t)\,dt$，$g(x,t)$ は，パラメータ t に依存する任意のゲージ変換(逆)行列である。こう定義すれば，$A_M=(A_\mu, A_\theta)$ は $(A_\mu(x), 0)$ の 4+1 次元におけるゲージ変換に過ぎないから，依然として (48) の水平性条件

$$\mathcal{F}(x,t)=g^{-1}(x,t)\,F(x)\,g(x,t)=F(x,t) \tag{54}$$

が成立する。したがって (51) より，(50) も A, C_1 をそれぞれ (52),(53) の $A(x,t), v(x,t)$ と理解して成立するのである[†]。なお，上の超場型式でもここでも，便宜上 4+1 次元と呼んだが，x の表す次元は 4 以外でも何でもよかったことに注意しておこう。

我々には，もう一つ数学的準備が必要である。今ゲージ場 1-form A の二つの値，A_0, A_1 を与えられたとき，その間をつなぐ 1-form

$$A_t\equiv tA_1+(1-t)A_0 \qquad (0\leqq t\leqq 1) \tag{55}$$

を定義する。この内挿ゲージ場 A_t に対応する場の強さの 2-form F_t は

$$F_t=dA_t+A_t{}^2 \tag{56}$$

で与えられる。ここで，A_t と F_t で構成された任意の多項式 $P(A_t, F_t)$ の上に働く次数 -1 の反微分演算子 (anti-derivation) k_t を，次のように導入する：**反**微分演算子とは，一般に，積にかかる時，**奇**(偶)数次の form とは**反**可換(可換)とした符号付きの Leibniz 則を満たし， 和にかかるときは線形であるような演算子をいう。今の場合，A_t は 1-form，F_t は 2-form だから，例えば

$$k_t(A_tA_tF_t)=(k_tA_t)A_tF_t-A_t(k_tA_t)F_t+A_tA_t(k_tF_t). \tag{57}$$

そして，A_t と F_t に対しては k_t 演算は次式で定義する。

$$k_tA_t\equiv 0, \qquad k_tF_t\equiv\partial A_t/\partial t=A_1-A_0. \tag{58}$$

これにより k_t は form の次数を一つ下げるので「次数 -1」の演算子と呼んだのである。このように定義した k_t が任意の多項式 $P(A_t, F_t)$ の上で

$$\frac{\partial}{\partial t}=k_t\,d+d\,k_t \tag{59}$$

を満たすことはすぐ確かめられる。[A_t, F_t の上で成立することを確かめれば充分で，これは (56) と $d^2=0$ から従う Bianchi 恒等式 $dF_t+[A_t, F_t]=0$ を利用すれば示せる (演習問題 9.4)。]

† 実際は，この場合の方が適用範囲が広く，$g(x,t)=\exp(t\lambda C(x))=1+t\lambda C(x)$ (λ: Grassmann 数) という特殊な場合が，先の超場型式を再現する。このとき Grassmann 座標 θ は λt に対応している。

次に，k_t を用いてホモトピー演算子 (homotopy operator) と呼ばれる，任意の A, F の多項式 $P(A, F)$ 上に働く演算子 k_{10}，を導入する：

$$k_{10} P(A, F) \equiv \int_0^1 dt\ k_t P(A_t, F_t) \tag{60}$$

そうすれば，(59) の両辺を $P(A_t, F_t)$ に演算し，0 から 1 まで t 積分することにより，すぐさま

$$P(A_1, F_1) - P(A_0, F_0) = (k_{10} d + d k_{10}) P(A, F) \tag{61}$$

なる公式を得る。これは **Cartan のホモトピー公式**と呼ばれるものである。

今，特に $A=F=0$ で 0 となる多項式 $P(A, F)$ に話を限れば，$A_0=0$（したがって $F_0=0$）ととり，A_1, F_1 の添字をなくして A, F と書き，ホモトピー演算子 k_{10} も単に k と記す。この場合，k は，

$$k d + d k = 1, \qquad k^2 = 0 \tag{62}$$

の性質を満たす。前者は (61) そのもので，後者も (60),(58) の定義と k_t の反微分性から容易に示せる。

ゲージ群 G が単純群の場合は，

$$\mathrm{tr}\, F^n \qquad (n=2, 3, 4, \cdots) \tag{63}$$

やその任意の多項式が，$U(1)$ 群の場合は $F^{U(1)}$ の任意の多項式が，ゲージ不変量である。一般コンパクト群の場合は，各単純因子群 G_α に対し

$$\underset{(\alpha)}{\mathrm{tr}}\, F^n \equiv \mathrm{tr}\, (F^{(\alpha)})^n, \tag{64}$$

$U(1)$ 因子群 G_β に対し $F^{U(1)_\beta}$ をつくり，その任意の多項式が不変量となる。これら F から構成されたゲージ不変な多項式 $P_{\mathrm{inv}}(F)$ は皆 $d P_{\mathrm{inv}}(F) = 0$ を満たす閉形式 (closed form) である。なぜなら，例えば，

$$\begin{aligned} d\, \mathrm{tr}\, F^n &= D\, \mathrm{tr}\, F^n \\ &= n\, \mathrm{tr}\, DF \cdot F^{n-1} = 0 \end{aligned} \tag{65}$$

だから[†]。ここで D は共変微分で，Bianchi 恒等式

$$DF = dF + [A, F] = 0 \tag{66}$$

を用いた。そこで，$F=0$ で 0 となる $P_{\mathrm{inv}}(F)$ に対し，ホモトピー公式 (61) または (62) を適用すれば，$dP_{\mathrm{inv}}=0$ を用いて

$$P_{\mathrm{inv}}(F) = d(kP_{\mathrm{inv}}(F)) = d \int_0^1 dt\ k_t P_{\mathrm{inv}}(F_t), \tag{67}$$

を得る。特に，単純群の $(2n+2)$-form $\mathrm{tr}\, F^{n+1}$ に適用すれば

† 不変量に対し共変微分 D は普通の微分 d に等しいことに注意。

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}\, F^{n+1} = d\omega_{2n+1}(A, F), \\ &\omega_{2n+1} = k\ \mathrm{tr}\, F^{n+1} = (n+1)\int_0^1 dt\ \mathrm{tr}\, AF_t^n. \end{aligned} \tag{68}$$

$F_t = t\,dA + t^2A^2 = t\,F + (t^2 - t)\,A^2$ に注意して t 積分を実行すれば, 例えば

$$\omega_3(A, F) = \mathrm{tr}\left(AF - \frac{1}{3}A^3\right), \tag{69}$$

$$\omega_5(A, F) = \mathrm{tr}\left(AF^2 - \frac{1}{2}A^3F + \frac{1}{10}A^5\right) \tag{70}$$

などを得る。(68) は転入公式 (transgression formula), $\omega_{2n+1}(A, F)$ は Chern (チャーン)-Simons (サイモン) form と呼ばれる。

さて, 準備が整ったので本題に戻る。アノマリーに対する Wess-Zumino の無矛盾性条件 (21) は, 微分形式を用いれば次のように書ける：

$$\varDelta = \int \mathcal{a}, \qquad \delta_{\mathrm{B}}\, \mathcal{a} = d\,\mathcal{B}. \tag{71}$$

ここでの $\mathcal{a}$ は, (21) での (0-form の) $\mathcal{a}$ に $dx^0dx^1dx^2dx^3$ を掛けた 4-form であり, $\mathcal{B}$ は, (21) での $\mathcal{B}^\mu$ を用いて $(-1/3!)\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathcal{B}^\mu dx^\nu dx^\rho dx^\sigma$ と書かれる 3-form である。[form の積分等については付録 E を参照せよ。] ここで上の超場型式の水平性条件 (48), $\mathcal{F} = F$, を思い起こし, それから当然

$$\mathrm{tr}\ \mathcal{F}^{n+1} = \mathrm{tr}\ F^{n+1} \tag{72}$$

が成立することに注意する。これは超空間 (x^μ, θ) 上の関数の等式であるが, もちろん $\theta = 0$ でも成立する†。ところが, ホモトピー公式 (61) や転入公式 (68) は,「外微分演算子, ゲージ場 1-form, 場の強さの 2-form」の組 (d, A, F) に対して

$$dA = F - A^2, \qquad dF = FA - AF \tag{73}$$

の性質と d 演算の反微分性 ($d^2 = 0$ は (73) から従う) が成立しさえすれば成り立つ公式で, それ以上の詳細によらない。それゆえ, 超場型式の場合の $(\tilde{d}, \mathcal{A}, \mathcal{F})$ に対しても成立し, 等式 (72) の両辺に公式 (68) を適用し

$$\tilde{d}\,\omega_{2n+1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = d\omega_{2n+1}(A, F) \tag{74}$$

を得る。ここで, $\omega_{2n+1}(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ を, (42) の $\mathcal{A} = A + C_1$ および $\mathcal{F} = F$ を用いて, ゴースト場 C_1 のべきで展開する：

$$\omega_{2n+1}(A + C_1, F) = \omega_{2n+1}^0 + \omega_{2n}^1 + \omega_{2n-1}^2 + \cdots + \omega_0^{2n+1}. \tag{75}$$

---

† もちろん, (72) の $(2n+2)$-form が自明に 0 とならないよう, x^μ の次元はしばらく $2n+2$ 以上にとっておく。

右辺の ω の上添字は C_1 のべき(したがってゴースト数 N_{FP})を，下添字は dx^μ に関する form の次数を表す。(43)，$\tilde{d}=d+\delta$，を思い起こし，$\delta=\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\cdot d\theta$ が N_{FP} を 1 上げる演算であることに注意すれば，(74) が C_1 の各べきごとに成り立つ式，すなわち次の**降下方程式** (descent equation) と呼ばれる一連の等式を意味していることがわかる：

$$\begin{aligned}
&\delta\omega^0_{2n+1}+d\omega^1_{2n}=0,\\
&\delta\omega^1_{2n}+d\omega^2_{2n-1}=0,\\
&\quad\vdots\\
&\delta\omega^{2n}_1+d\omega^{2n+1}_0=0,\\
&\delta\omega^{2n+1}_0=0.
\end{aligned}\tag{76}$$

$\delta=\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\cdot d\theta$ であるから，これらの等式は，最後の式以外皆，Wess-Zumino 無矛盾性条件 (71) と同じ形をしている。特に第 2 式の ω^1_{2n} はゴースト数 $N_{\mathrm{FP}}=+1$ を持っているから，アノマリー form $\mathcal{a}$ に対する条件を満たしており，Wess-Zumino 条件 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\mathcal{a}=d\mathcal{B}$ の一つの解を与える†。

4 次元時空の場合は，$\mathcal{a}$ は 4-form であるから，ω^1_4 が解であるが，一般の $2n$ 次元時空の場合は，$\mathcal{a}$ は $2n$-form で $\mathcal{a}=\omega^1_{2n}$ が解となる。この ω^1_{2n} の形を一般に求めよう。ω_{2n+1} の表式 (68) より

$$\omega_{2n+1}(\mathcal{A},\mathcal{F})=(n+1)\int_0^1 dt\ \mathrm{tr}\ \mathcal{A}\mathcal{F}_t^n. \tag{77}$$

これに $\mathcal{A}=A+C_1$ および

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_t&=t\mathcal{F}+(t^2-t)\mathcal{A}^2=tF+(t^2-t)(A+C_1)^2\\
&=F_t+(t^2-t)\{A,C_1\}+(t^2-t)C_1{}^2
\end{aligned}\tag{78}$$

を代入して C_1 の 1 次項をとり出す。このとき，次式で定義される“対称化されたトレース”(symmetrized trace) str を使うのが便利である：

$$\mathrm{str}\,(A_1A_2A_3\cdots A_n)\equiv\sum_\sigma\frac{1}{n!}\epsilon_\sigma\ \mathrm{tr}\,(A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)}\cdots A_{\sigma(n)}). \tag{79}$$

和はすべての置換 σ にわたってとり，ϵ_σ は，$A_1,\cdots,A_n$ 中に反可換量(奇数次 form)がある場合 $A_1A_2\cdots A_n$ から $A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)}\cdots A_{\sigma(n)}$ の順に持ってくるときに必要な反可換量間の互換の回数の偶奇に応じて ±1 をとる符号因子である。n が $n+1$ の場合のこの記号を使えば，(77) の C_1 の一次項は簡単に次のように書ける：

$$\omega^1_{2n}=(n+1)\int_0^1 dt\ \mathrm{str}\,(C_1F_t^n+n(t^2-t)\{A,C_1\}AF_t^{n-1}). \tag{80}$$

† (76) 式は ω^1_{2n} が自明でないアノマリーであることも保証している(演習問題 9.11 参照)。

ここで，A_t に関する共変微分

$$D_t X = dX + [A_t, X] \tag{81}$$

を用いれば，Bianchi 恒等式 $D_t F_t = 0$ により

$$\begin{aligned} \mathrm{str}\,[(D_t C_1) A F_t^{n-1} - C_1 (D_t A) F_t^{n-1}] &= d\ \mathrm{str}\,(C_1 A F_t^{n-1}) \\ &= \mathrm{str}\,[(dC_1) A F_t^{n-1} - C_1\, d\,(A F_t^{n-1})] \end{aligned} \tag{82}$$

が成立するから†，(80) 中の $t\{A, C_1\} = \{A_t, C_1\}$ を $D_t C_1 - dC_1$ と書き直し，この等式 (82) を適用して

$$\begin{aligned} \omega_{2n}^1 = (n+1) \int_0^1 dt\ \mathrm{str}\,[C_1 F_t^n + n(t-1) C_1 (D_t A) F_t^{n-1} \\ - n(t-1) C_1 d(A F_t^{n-1})] \end{aligned} \tag{83}$$

を得る。ところが，右辺第 2 項は，$D_t A = dA + 2tA^2 = \partial F_t / \partial t$ を用いれば，t で部分積分してちょうど第 1 項を相殺することがわかり，結局，

$$\omega_{2n}^1 = n(n+1) \int_0^1 dt\,(1-t)\ \mathrm{str}\,(C_1\, d\,(A F_t^{n-1})) \tag{84}$$

の表式を得る。$2n = 2, 4$ 次元のときのあらわな形は，

$$\omega_2^1 = \mathrm{tr}\,(C_1\, dA), \tag{85}$$

$$\omega_4^1 = \mathrm{tr}\left(C_1\, d\left(AdA + \frac{1}{2} A^3\right)\right), \tag{86}$$

となる。

(84) で得た，時空 $2n$ 次元におけるアノマリー $2n$-form ω_{2n}^1 は，ゲージ不変 $(2n+2)$-form $\mathrm{tr}\ \mathcal{F}^{n+1} = \mathrm{tr}\ F^{n+1}$ から出発して求めたものである。4 次元の場合，G が単純群ならば，ゲージ不変 6-form は $\mathrm{tr}\ F^3$ のみであるから (86) の $\omega_4{}^1$ が一意的であるが††，G が半単純の場合は，各単純因子群 G_α ごとに不変 6-form $\mathrm{tr}\,(F^{(\alpha)})^3$ をつくれるから，(86) の ω_4^1 は各 G_α ごとに存在し，一般解は

$$\begin{aligned} \omega_4^1(A^{(\alpha)}) &= \mathrm{tr}\left[C_{1(\alpha)}\, d\left(A^{(\alpha)} dA^{(\alpha)} + \frac{1}{2}(A^{(\alpha)})^3\right)\right] \\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\ \mathrm{tr}\left[C_{(\alpha)} \partial_\mu \left(A_\nu^{(\alpha)} \partial_\rho A_\sigma^{(\alpha)} + \frac{1}{2} A_\nu^{(\alpha)} A_\rho^{(\alpha)} A_\sigma^{(\alpha)}\right)\right] \\ &\qquad \times dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 d\theta \end{aligned} \tag{87}$$

の線形結合で与えられる。果たして，初めの約束通り，この結果 (87) は，前に初等的方法で求めた一般形 (37) (第 2 項) を再現している。(86) あるいは (87) は**非可換アノマリー** (non-Abelian anomaly) と呼ばれる。

---

† (82) の等式は，str の中の，A および $(n-1)$ 個の F_t が任意の順に並ぶ各 tr 項で，それぞれで成立するから，str の場合にも成立するのである。

†† もちろん，この方法でつくれるものに関する限りの一意性である。

G が一般のコンパクト群で $U(1)$ 因子群 $U(1)_\beta$ を含む場合は，不変 6-form として $F^{U(1)_\beta}\,\mathrm{tr}\,(F^{(\alpha)})^2$ および $F^{U(1)_\beta}F^{U(1)_\gamma}F^{U(1)_\delta}$ が存在する。前者は，公式 (67) を適用するまでもなく，不変量は閉形式であることおよび (69) を考慮して

$$F^{U(1)_\beta}\,\mathrm{tr}\,(F^{(\alpha)})^2 = d\Omega_5 = d\Omega'_5 \tag{88}$$

$$\Omega_5 = \omega_3(A^{(\alpha)}, F^{(\alpha)})\,F^{U(1)_\beta} = \mathrm{tr}\left[A^{(\alpha)}F^{(\alpha)} - \frac{1}{3}(A^{(\alpha)})^3\right]F^{U(1)_\beta}, \tag{89}$$

$$\Omega'_5 = A^{U(1)_\beta}\,\mathrm{tr}\,(F^{(\alpha)})^2, \tag{90}$$

の 2 通りの ω_5 対応物の書き方があることがわかる。ω_5 の場合と同じく，これら Ω_5, Ω'_5 の A, F に $\mathcal{A} = A + C_1$, $\mathcal{F} = F$ を代入し，ゴースト場 C_1 に関し 1 次の部分 $\Omega_4^1, \Omega_4^{1\prime}$ をとり出せば次のアノマリーが得られる：

$$\begin{aligned}\Omega_4^1 &= \omega_2^1(A^{(\alpha)})\,F^{U(1)_\beta} = \mathrm{tr}\,(C_{1(\alpha)}\,dA^{(\alpha)})\,F^{U(1)_\beta}\\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\,[C_{(\alpha)}\,\partial_\mu A_\nu^{(\alpha)}]\,\partial_\rho A_\sigma^{U(1)_\beta}\,dx^0dx^1dx^2dx^3d\theta,\end{aligned} \tag{91}$$

$$\begin{aligned}\Omega_4^{1\prime} &= C_1^{U(1)_\beta}\,\mathrm{tr}\,(F^{(\alpha)})^2 = C_1^{U(1)_\beta}\,\mathrm{tr}\left[d\left(A^{(\alpha)}dA^{(\alpha)} + \frac{2}{3}(A^{(\alpha)})^3\right)\right]\\ &= c^{U(1)_\beta}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\left[\partial_\mu\left(A_\nu^{(\alpha)}\,\partial_\rho A_\sigma^{(\alpha)} + \frac{2}{3}A_\nu^{(\alpha)}A_\rho^{(\alpha)}A_\sigma^{(\alpha)}\right)\right]dx^0dx^1dx^2dx^3d\theta\end{aligned} \tag{92}$$

(91) は，前の初等的方法の結果 (37) の第 1 項を再現している。(92) は $U(1)$ 因子群のゴースト $c^{U(1)_\beta}$ を含むアノマリーで，前の方法による答 (19) に対応するものである。前の方法の一般解 (19) では，$c^{U(1)_\beta}$ に掛かるものは全く一般的なゲージ不変関数 $f_{\text{ゲージ不変}}(\phi_I)$ としか決まらなかったが，(92) の解では $\mathrm{tr}\,F^2 = d\,\mathrm{tr}\,[AdA + (2/3)A^3]$ というゲージ場の特定の不変関数が現れている。実際の Feynman グラフの計算により現れる $U(1)$ 因子群の場合のアノマリーは，事実次節で見るように，ちょうど (92) の形をしたもののみなのである。(92) のアノマリーは**可換アノマリー** (Abelian anomaly) と呼ばれる。非可換アノマリー (87) と可換アノマリー (92) では A^3 部分の係数が 1/2, 2/3 と異なっていることに注意しておこう。

上で Ω_5 と Ω'_5 の違いは単に全微分量 $d(*)$ であった．そのため，実は，それらから導かれたアノマリー (91) と (92) は，その見かけ上の違いにもかかわらず，自明な BRS 不変項（および全微分項）を除いて全く同一のアノマリーなのである。このことは実際 (76) の第 1 式を利用すれば容易にわかる： $d(\Omega_4^1 - \Omega_4^{1\prime}) = -\delta(\Omega_5 - \Omega'_5) = -\delta(d(*)) = d(\delta(*))$，よって $\Omega_4^1 - \Omega_4^{1\prime} = \delta(*) + d(**)$.

不変量 $F^{U(1)_\beta}F^{U(1)_\gamma}F^{U(1)_\delta}$ から出発して得られるアノマリーも，(92) の可換アノマリーと本質的に同じ $c^{U(1)_\beta}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^{U(1)_\gamma}_{\mu\nu}F^{U(1)_\delta}_{\rho\sigma}$ の形となる。

G が単純群の場合でも，時空の次元 $2n$ が高くなれば，$\mathrm{tr}\,F^{n+1-m}\cdot\mathrm{tr}\,F^m$ ような 2 個以上のトレースの積で与えられる不変 $(2n+2)$-form がいろいろつくれる。それらの導くアノマリーは，(89), (91) と同様にして，$\omega^1_{2(n-m)}\cdot\mathrm{tr}\,F^m$ のごとく，より低い次元のアノマリー form $\omega^1_{2(n-m)}$ と不変 form $(\mathrm{tr}\,F^k\cdot\mathrm{tr}\,F^l\cdots)$ との積の形で与えられる。

9-2　アノマリーの計算と幾何学的意味

前節では Wess-Zumino 無矛盾性条件から許されるアノマリーの一般形を求めたが，この節では実際のゲージ理論において，Feynman グラフの具体的計算を行い，それらのアノマリーが現れることを見る。また，アノマリーを経路積分の Jacobian から導く藤川の方法を紹介し，アノマリーの幾何学的意味についても触れる。

アノマリーとカレント保存の破れ　今，一般の群 $G=G_R\times G_L$ のゲージ場 $A_\mu\equiv(A_{R\mu}, A_{L\mu})$ と極小相互作用しているカイラル・フェルミオン多重項 $\psi\equiv(\psi_R, \psi_L)$ を考えよう；その Lagrangian は次式で与えられる。

$$\mathcal{L}_\psi=\bar{\psi}_R i\gamma^\mu(\partial_\mu+A_{R\mu})\mathcal{P}_+\psi_R+\bar{\psi}_L i\gamma^\mu(\partial_\mu+A_{L\mu})\mathcal{P}_-\psi_L, \tag{1}$$

$$\mathcal{P}_\pm\equiv\frac{1}{2}(1\pm\gamma_5),\qquad A_{H\mu}=\sum_{G_\alpha\in G_H}(-ig_\alpha\sum_{a\in G_\alpha}A^a_\mu T^a_H)\qquad H=R, L. \tag{2}$$

ここで，G_R と G_L とは一般に互いに無関係な群で，それゆえ，ψ_R と ψ_L もそれぞれ G_R と G_L の独立な (一般に可約な) 表現でよい。ここでは A_μ と ψ の結合としてカイラル型，$\gamma^\mu(1+\epsilon\gamma_5)/2$ $(\epsilon=\pm1)$，結合のみを書いたが，ベクトル型 γ^μ や軸性ベクトル型 $\gamma^\mu\gamma_5$ の結合は，カイラル型結合の和や差で考慮することができる。Lagrangian (1) を用いて，ゲージ場 A の汎関数 $\Gamma[A]$ を

$$e^{i\Gamma[A]}=\int\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\,\exp(i\int d^4x\,\mathcal{L}_\psi)=\mathrm{Det}(i\not{D}_{R+})\mathrm{Det}(i\not{D}_{L-}) \tag{3}$$

$$\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\equiv\mathcal{D}\psi_R\mathcal{D}\bar{\psi}_R\mathcal{D}\psi_L\mathcal{D}\bar{\psi}_L,\qquad \not{D}_{H\pm}\equiv\gamma^\mu(\partial_\mu+A_{H\mu})\mathcal{P}_\pm, \tag{4}$$

で定義する。この $\Gamma[A]$ は，フェルミオン 1-loop グラフのすべてに対応し，1-loop レベルでのゲージ場の有効作用を与える。系の 1-loop レベルでの真の有効作用には，もちろん，ゲージ場自身が loop を回るグラフの寄与が存在するが，それらには次元正則化のようなゲージ不変な正則化が適

用できるのでアノマリーを与えず，したがって，この節のアノマリーの議論においては，(3) で定義される $\Gamma[A]$ が 1-loop レベルの真の有効作用と思って差し支えない。

(3) の有効作用 $\Gamma[A]$ に $\tilde{S}*$ を演算すれば

$$\tilde{S}*\Gamma[A]=\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\Gamma[A]=\int d^4x\ D_\mu c^a\frac{\delta}{\delta A_\mu^a}\Gamma[A]$$

$$=-\int d^4x\ c^a D^\mu\langle J_\mu^a\rangle, \tag{5}$$

$$J_\mu^a\equiv\frac{\partial}{\partial A_\mu^a}\mathcal{L}_\psi=g_a\bar{\psi}_{\mathrm{R}}T_{\mathrm{R}}^a\gamma_\mu\mathcal{P}_+\psi_{\mathrm{R}}\quad \text{または}\quad g_a\bar{\psi}_{\mathrm{L}}T_{\mathrm{L}}^a\gamma_\mu\mathcal{P}_-\psi_{\mathrm{L}}, \tag{6}$$

$$\langle X\rangle\equiv\int\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\ X\exp(i\int d^4x\ \mathcal{L}_\psi) \tag{7}$$

となるから，アノマリー $\tilde{S}*\Gamma=\Delta\equiv\int d^4x\ c^a\mathcal{A}'^a\neq 0$ の存在は

$$D^\mu\langle J_\mu^a\rangle=-\mathcal{A}'^a\neq 0, \tag{8}$$

すなわち，カレント J_μ^a の (共変的) 保存則の破れを意味していることがわかる。

1-loop グラフの計算 フェルミオン 1-loop グラフの寄与は，(3) より

$$\Gamma[A]=\sum_{\mathrm{H}}i^{-1}\ln\mathrm{Det}(i\not{D}_{\mathrm{H}\pm})=\sum_{\mathrm{H}}i^{-1}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{Ln}(i\not{\partial}+i\not{A}_{\mathrm{H}})\mathcal{P}_{\mathrm{H}}$$

$$=\sum_{\mathrm{H}}\left[i^{-1}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{Ln}(i\not{\partial}\,\mathcal{P}_{\mathrm{H}})+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)i^{-1}\,\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{-i\not{\partial}}i\not{A}_{\mathrm{H}}\mathcal{P}_{\mathrm{H}}\right)^n\right] \tag{9}$$

と形式的に展開される。$\sum_{\mathrm{H}}$ は $\not{D}_{\mathrm{R}+}$ と $\not{D}_{\mathrm{L}-}$ からの寄与の和を表し，$\mathcal{P}_{\mathrm{H}}$ は $\mathcal{P}_{\mathrm{R}}=\mathcal{P}_+$, $\mathcal{P}_{\mathrm{L}}=\mathcal{P}_-$ である。この展開式より，$\Gamma[A]$ の A に関して n 次の項は

$$\Gamma[A]|_{n\,\text{次項}}=\int\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{d^4k_i}{(2\pi)^4}\right)(2\pi)^4\delta^4(\sum_i k_i)\left(-\frac{1}{n}\right)$$

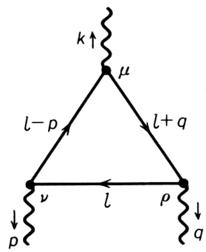
$$\times\sum_{\mathrm{H}}\mathrm{tr}(A_{\mathrm{H}\mu_1}(-k_1)\cdots A_{\mathrm{H}\mu_n}(-k_n))\Gamma_{\mathrm{H}}^{(n)\mu_1\cdots\mu_n}(k_1,\cdots,k_n),$$

$$\Gamma_{\mathrm{H}}^{(n)\mu_1\cdots\mu_n}=\int\frac{d^4l}{i(2\pi)^4}\mathrm{tr}\left[\frac{1}{-\not{l}}i\gamma^{\mu_1}\mathcal{P}_{\mathrm{H}}\frac{1}{-(\not{l}+\not{k}_1)}i\gamma^{\mu_2}\mathcal{P}_{\mathrm{H}}\frac{1}{-(\not{l}+\not{k}_1+\not{k}_2)}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\frac{1}{-(\not{l}+\not{k}_1+\cdots+\not{k}_{n-1})}i\gamma^{\mu_n}\mathcal{P}_{\mathrm{H}}\right], \tag{10}$$

となる。$\Gamma_{\mathrm{H}}^{(n)}$ は n 角形グラフに対応し，特に $\Gamma_{\mathrm{H}}^{(3)}$ は，$\mu_{1\sim3}$ を μ,ν,ρ, $k_{1\sim3}$ を k,p,q と呼べば 9·1 図に示す三角グラフの寄与である。9·1 図では計算の便宜のため，loop 運動量 l を $l+q$ にとったので，$\Gamma_{\mathrm{H}}^{(3)}$ は

$$\Gamma_{\mathrm{H}}^{(3)\mu\nu\rho}(k, p, q)$$
$$=\int\frac{d^4 l}{i(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\Big[\frac{1}{-(\not{l}+\not{q})}i\gamma^{\mu}\mathcal{P}_{\mathrm{H}}$$
$$\times\frac{1}{-(\not{l}-\not{p})}i\gamma^{\nu}\mathcal{P}_{\mathrm{H}}\frac{1}{-\not{l}}i\gamma^{\rho}\mathcal{P}_{\mathrm{H}}\Big] \quad (11)$$



9·1 図

で与えられる。(10) の各項は $n\leqq 4$ では紫外発散しており，厳密にいえば何らかの正則化を行わないと意味がない。後で次元正則化を用いるが，その場合，(10) や (11) の表式は，正確に言うと，(1) のカイラル・フェルミオンの Lagrangian $\mathcal{L}_{\psi}$ ではなく，

$$\hat{\mathcal{L}}_{\psi}=\bar{\psi}_{\mathrm{R}}(i\not{\partial}+i\not{A}_{\mathrm{R}}\mathcal{P}_{+})\psi_{\mathrm{R}}+\bar{\psi}_{\mathrm{L}}(i\not{\partial}+i\not{A}_{\mathrm{L}}\mathcal{P}_{-})\psi_{\mathrm{L}}$$
$$=\mathcal{L}_{\psi}+\bar{\psi}_{\mathrm{R}}i\not{\partial}_{-}\psi_{\mathrm{R}}+\bar{\psi}_{\mathrm{L}}i\not{\partial}_{+}\psi_{\mathrm{L}}, \qquad (\not{\partial}_{\pm}\equiv\not{\partial}\,\mathcal{P}_{\pm}) \tag{12}$$

なる Dirac フェルミオンの Lagrangian $\hat{\mathcal{L}}_{\psi}$ を用いた計算に相当していることに注意しておこう。すなわち，$\bar{\psi}_{\mathrm{R}}i\not{\partial}_{-}\psi_{\mathrm{R}}+\bar{\psi}_{\mathrm{L}}i\not{\partial}_{+}\psi_{\mathrm{L}}$ を加えて Dirac フェルミオンにしているわけだが，これらはゲージ場と結合していない自由場であるから，A の汎関数としての $\Gamma[A]$ を変えない許される "正則化" である。

さて，我々が今興味あるのは，$\Gamma[A]$ の BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\Gamma[A]$ である：

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\Gamma[A]=\sum_{n}\int\prod\frac{d^4k_i}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta^4(\textstyle\sum k_i)\sum_{\mathrm{H}}\Gamma_{\mathrm{H}}^{(n)\mu_1\cdots\mu_n}(k_1,\cdots,k_n)$$
$$\times(-1)\,\mathrm{tr}\,[(D_{\mu_1}C_{\mathrm{H}}(-k_1))A_{\mathrm{H}\mu_2}\cdots A_{\mathrm{H}\mu_n}(-k_n)] \tag{13}$$

そこで，まず，$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\Gamma[A]$ の場について 3 次の項のうち，共変微分

$$D_{\mu}C_{\mathrm{H}}(-k)=ik_{\mu}C_{\mathrm{H}}(-k)+\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}[A_{\mathrm{H}\mu}(-p),C_{\mathrm{H}}(-k+p)] \tag{14}$$

の第 1 項 $ik_{\mu}C_{\mathrm{H}}(-k)$ が効く部分を計算する。その項は

$$\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta^4(k+p+q)$$
$$\times(-)\sum_{\mathrm{H}}\mathrm{tr}[C_{\mathrm{H}}(-k)A_{\mathrm{H}\nu}(-p)A_{\mathrm{H}\rho}(-q)]ik_{\mu}\Gamma_{\mathrm{H}}^{(3)\mu\nu\rho}(k,p,q) \tag{15}$$

である。この $ik_{\mu}\Gamma_{\mathrm{H}}^{(3)\mu\nu\rho}$ に対し†,

$$ik_{\mu}i\gamma^{\mu}\mathcal{P}_{\mathrm{H}}=[(\not{l}+\not{q})-(\not{l}-\not{p})]\mathcal{P}_{\mathrm{H}}=(\not{l}+\not{q})\mathcal{P}_{\mathrm{H}}-\tilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{H}}(\not{l}-\not{p}) \tag{16}$$

($\tilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{H}}$ は，$\tilde{\mathcal{P}}_{\pm}=\mathcal{P}_{\mp}$ を表す) を用いれば，(11) の $i\gamma^{\mu}\mathcal{P}_{\mathrm{H}}$ 頂点の両側のフェルミ

† 次式以降 (20) までの議論は，5-7 節で tree グラフに対して行った Feynman グラフの図形変形による WT 恒等式の証明と同じである。(16), (17) の変形は 5-7 (14) または 5·14 図の最低次 WT 恒等式に他ならない。

オン伝播関数の一方ずつを消せて，$ik_\mu \Gamma_{\mathrm{H}}^{(3)\mu\nu\rho}$ は

$$
\begin{aligned}
ik_\mu \Gamma_{\mathrm{H}}^{(3)\mu\nu\rho} &= \int \frac{d^4 l}{i(2\pi)^4} \mathrm{tr}\left[-\mathcal{P}_{\mathrm{H}} \frac{1}{-(\not{l}-\not{p})} i\gamma^\nu \mathcal{P}_{\mathrm{H}} \frac{1}{-\not{l}} i\gamma^\rho \mathcal{P}_{\mathrm{H}} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{-(\not{l}+\not{q})} \tilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{H}} i\gamma^\nu \mathcal{P}_{\mathrm{H}} \frac{1}{-\not{l}} i\gamma^\rho \mathcal{P}_{\mathrm{H}} \right] \\
&= \int \frac{d^4 l}{i(2\pi)^4} \mathrm{tr}\left[-\frac{1}{-(\not{l}-\not{p})} i\gamma^\nu \mathcal{P}_{\mathrm{H}} \frac{1}{-\not{l}} i\gamma^\rho \mathcal{P}_{\mathrm{H}} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{-\not{l}} i\gamma^\rho \mathcal{P}_{\mathrm{H}} \frac{1}{-(\not{l}+\not{q})} i\gamma^\nu \mathcal{P}_{\mathrm{H}} \right]
\end{aligned}
\tag{17}
$$

となる。ところが，(15) においては，2 組の添字 $(\nu, p), (\rho, q)$ は和および積分をとっているダミー添字であるから，その 2 組を交換してよい。この交換を (17) の tr の中の第 1 項に対して行えば，(15) に対し

$$
\begin{aligned}
(15) = \cdots (-) \sum_{\mathrm{H}} \Big\{ & -\mathrm{tr}(A_{\mathrm{H}\nu}(-p) C_{\mathrm{H}}(-k) A_{\mathrm{H}\rho}(-q)) \\
& \times \int \frac{d^4 l}{i(2\pi)^4} \mathrm{tr}\left[\frac{1}{-(\not{l}-\not{q})} i\gamma^\rho \mathcal{P}_{\mathrm{H}} \frac{1}{-\not{l}} i\gamma^\nu \mathcal{P}_{\mathrm{H}} \right] \\
& + \mathrm{tr}(C_{\mathrm{H}}(-k) A_{\mathrm{H}\nu}(-p) A_{\mathrm{H}\rho}(-q)) \\
& \times \int \frac{d^4 l}{i(2\pi)^4} \mathrm{tr}\left[\frac{1}{-\not{l}} i\gamma^\rho \mathcal{P}_{\mathrm{H}} \frac{1}{-(\not{l}+\not{q})} i\gamma^\nu \mathcal{P}_{\mathrm{H}} \right] \Big\}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

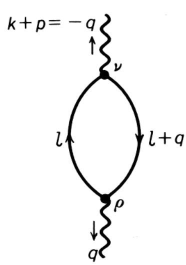
の表式を得る。ここで，もし第 1 項の loop 積分変数 l をシフトして $l+q$ に変数変換できるとすれば，二つの項の積分は，全く同一の

$$
\int \frac{d^4 l}{i(2\pi)} \mathrm{tr}\left[\frac{1}{-\not{l}} i\gamma^\rho \mathcal{P}_{\mathrm{H}} \frac{1}{-(\not{l}+\not{q})} i\gamma^\nu \mathcal{P}_{\mathrm{H}} \right] = \Gamma_{\mathrm{H}}^{(2)\nu\rho}(k+p, q) \tag{19}
$$

となるが，これは，ちょうど 9·2 図の "二角形" グラフに相当する振幅で，(10) の $\Gamma[A]|_{2次項}$ の係数 $\Gamma_{\mathrm{H}}^{(2)}$ に他ならない。したがって (18) は

$$
(15) = \cdots (-) \sum_{\mathrm{H}} \{ -\mathrm{tr}([A_{\mathrm{H}\nu}(-p), C_{\mathrm{H}}(-k)] A_{\mathrm{H}\rho}(-q)) \Gamma_{\mathrm{H}}^{(2)\nu\rho}(k+p, q) \} \tag{20}
$$

となって，(13) の $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}} \Gamma[A]$ 中の，$\Gamma[A]|_{2次項}$ に (14) の第 2 項 (斉次項) の変換を行った項と符号が逆でぴったり一致し相殺する。



9·2 図

この $\Gamma[A]$ の BRS 不変性の証明は，(18) での loop 積分変数のシフト以外はすべて代数的な演算で問題なく，$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}} \Gamma[A]$ の場について任意次数の項に同様に適用できる。積分変数のシフトも，積分が収束しているならもちろん許されるのだが，(18) の l 積分は (素朴な次数勘定で 2 次の) 紫外発散を含むので正当化できな

いのである。それゆえ，この問題を正しく扱うには，正則化を行って積分をちゃんと定義しなければならない。この場合，通常 Pauli-Villars-Gupta の正則化が用いられることが多いが，ここでは，上の計算をなるだけ尊重するべく次元正則化をとることにする。

次元正則化の場合，上の計算で問題が起こるのは $\mathcal{P}_{\rm H}=(1\pm\gamma_5)/2$ 中に γ_5 を含む (16) である。7-1 で説明したように，γ_5 は複素 n 次元への自然な拡張が存在せず，単に定数行列 $\gamma_5=i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ と定義される。したがって γ_5 は，n 次元ベクトルである γ^μ 行列とは，初めの 4 成分は反可換だが，残りの $n-4$ 成分とは可換になる。これを考慮するため，loop 運動量 l を，初めの 4 成分が l と一致し残り成分が 0 であるベクトル $\underline{l}$ を分離して，$l=\underline{l}+r$ と書く。そうすれば，(16) は，この場合正しくは，

$$ik_\mu i\gamma^\mu \mathcal{P}_{\rm H}=(\not{l}+\not{q})\mathcal{P}_{\rm H}-\tilde{\mathcal{P}}_{\rm H}(\not{l}-\not{p})-\not{r}\,\epsilon_{\rm H}\gamma_5 \quad (\epsilon_{\rm R}=+1,\ \epsilon_{\rm L}=-1) \tag{21}$$

となる。次元正則化ではすべてのベクトルが n 次元に拡張されるが，外線運動量 k^μ, p^μ, q^μ や外線“波動関数” $A_{{\rm H}\mu}$ は，すべて，初めの 4 成分以外の成分は 0 のベクトルにとっておく。そうすれば，(21) 右辺の初めの 2 項に関しては，上で行った式変形がすべて成り立ち，しかも，今度は l 積分が n 次元に正則化されたものであるから有限で，(18) での積分変数のシフト $l\to l+q$ が許され，BRS 不変性が成り立つ。それゆえ，アノマリーの評価には，(21) の最後の項の寄与だけを計算すればよい。

(11)$\times ik_\mu$ への (21) の最後の項の寄与は，

$$ik_\mu \Gamma_{\rm H}^{(3)\mu\nu\rho}\Big|_{\text{アノマリー}}=\int\frac{d^n l}{i(2\pi)^n}\,\frac{{\rm tr}[(\not{l}+\not{q})(-\epsilon_{\rm H}\not{r}\gamma_5)(\not{l}-\not{p})\gamma^\nu\mathcal{P}_{\rm H}\not{l}\gamma^\rho\mathcal{P}_{\rm H}]}{(l+q)^2(l-p)^2l^2} \tag{22}$$

である。この分子のトレース部分を $l=\underline{l}+r$ を代入し，r の初めの 4 成分が 0 だから $\not{r}$ が，γ_5 と可換，他の $\underline{\not{l}}, \not{p}, \not{q}, \gamma^\nu, \gamma^\rho$ と反可換，であることを考慮して計算する。$\not{r}\gamma_5$ 頂点の $\not{r}$ は，$(\not{l}+\not{q}), (\not{l}-\not{p}), \not{l}$ のどれかからもう一つ $\not{r}$ を出して縮約しなければならないこと，および ${\rm tr}(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma)=-4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ [公式 (B.28)] に注意して

$$\begin{aligned}
&-\epsilon_{\rm H}\,{\rm tr}[\gamma_5\not{r}(\underline{\not{l}}-\not{p}+\not{r})\gamma^\nu\mathcal{P}_{\rm H}(\underline{\not{l}}+\not{r})\gamma^\rho\mathcal{P}_{\rm H}(\underline{\not{l}}+\not{q}+\not{r})]\\
&\quad=-\epsilon_{\rm H}r^2\,{\rm tr}[\gamma_5(\underline{\not{l}}-\not{p})\gamma^\nu\mathcal{P}_{\rm H}\underline{\not{l}}\gamma^\rho\mathcal{P}_{\rm H}+\gamma_5(\underline{\not{l}}-\not{p})\gamma^\nu\mathcal{P}_{\rm H}\gamma^\rho\mathcal{P}_{\rm H}(\underline{\not{l}}+\not{q})\\
&\qquad\qquad+\gamma_5\gamma^\nu\mathcal{P}_{\rm H}\underline{\not{l}}\gamma^\rho\mathcal{P}_{\rm H}(\underline{\not{l}}+\not{q})]\\
&\quad=4i\epsilon_{\rm H}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}r^2[p_\mu\underline{l}_\sigma-\underline{l}_\mu q_\sigma]\times\frac{1}{2},
\end{aligned} \tag{23}$$

と変形できる。ただし，トレースの中で γ_5 因子を偶数個拾う項はすべて落とした。それらは 0 ではないが，$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ に比例する真のアノマリーではなく，前節に示したように $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}(Y)$ の形の自明な破れ(すなわち，正則化処法のまずさに起因する破れ)でゲージ場の局所相殺項で消すことができる項だからである。

したがって，(22) の積分には，次の二つの型の積分

$$I_1=\int\frac{d^nl}{i(2\pi)^n}\frac{r^2}{(l+q)^2(l-p)^2l^2},\qquad I_2=\int\frac{d^nl}{i(2\pi)^n}\frac{r^2\underline{l}_\mu}{(l+q)^2(l-p)^2l^2} \tag{24}$$

のうち I_2 を評価すればよいことになる。I_1 は後で使うのでついでに評価する。これらは分子が $n=4$ で消える因子 $r^2=(l-\underline{l})^2$ を含んでいるから，積分の $n=4$ での pole 部分だけが効くことに注意する。付録 C の Feynman パラメータ公式 (C.2) を使って分母の因子を一つにまとめた後，I_1, I_2 に対してそれぞれ積分公式 (C.9), (C.10) に，添字が 4 から n までのみ走る $g_{\mu\nu}$ を掛けたものを適用して，

$$\left.\begin{matrix}I_1\\I_2\end{matrix}\right\}=\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma(3)}\int_0^1 2ydydx\frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{[m^2(x,y)]^{2-\frac{n}{2}}}\frac{1}{2}(n-4)\times\left\{\begin{matrix}1\\y[xp_\mu-(1-x)q_\mu]\end{matrix}\right.$$

$$m^2(x,y)=-y[xp^2+(1-x)q^2]+y^2[xp-(1-x)q]^2 \tag{25}$$

を得る。$n=4$ の極限で，これは簡単に

$$I_1=-\frac{1}{32\pi^2},\qquad I_2=-\frac{1}{32\pi^2}\frac{p_\mu-q_\mu}{3}, \tag{26}$$

を与える。この I_2 を用いれば，(22) の積分は，(23) より

$$ik_\mu\Gamma_{\mathrm{H}}^{(3)\mu\nu\rho}|_{\text{アノマリー}}=\frac{i\epsilon_{\mathrm{H}}}{24\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\mu q_\sigma \tag{27}$$

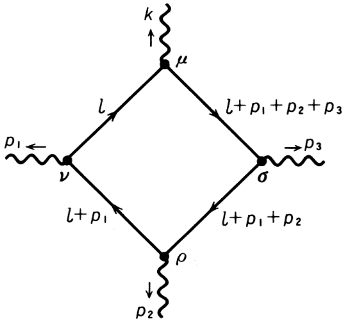
となる。

同様な方法で，9·3 図に示した四角グラフに対応する $\Gamma[A]|_{4\text{次項}}$ に対して $ik_\mu\Gamma_{\mathrm{H}}^{(4)\mu\nu\rho\sigma}$ を計算すれば，$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 比例項を拾って

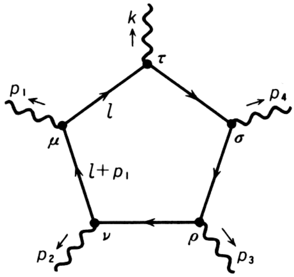
$$ik_\mu\Gamma_{\mathrm{H}}^{(4)\mu\nu\rho\sigma}|_{\text{アノマリー}}=\frac{i\epsilon_{\mathrm{H}}}{24\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}i\frac{(p_1+p_2+p_3)_\mu}{2} \tag{28}$$

を得ることができる (演習問題 9.5)。

9·4 図の五角形グラフの場合，その振幅 $\Gamma^{(5)\tau\mu\nu\rho\sigma}$ 自身は収束しているが，$ik_\tau\Gamma_{\mathrm{H}}^{(5)\tau\mu\nu\rho\sigma}$ の WT 恒等式の計算では対数発散が現れ，潜在的には危険なグラフである。ところが，$ik_\tau\Gamma_{\mathrm{H}}^{(5)\tau\mu\nu\rho\sigma}$ に対する (22) と同様な loop 積分表式において分子のトレース因子は



9·3 図



9·4 図

$$-\epsilon_{\mathrm{H}}\,\mathrm{tr}\,[\not{r}\gamma_5 \not{l}\gamma^\mu \mathcal{P}_{\mathrm{H}}(\not{l}+\not{P}_1)\gamma^\nu \mathcal{P}_{\mathrm{H}}(\not{l}+\not{P}_2)\gamma^\rho \mathcal{P}_{\mathrm{H}}(\not{l}+\not{P}_3)\gamma^\sigma \mathcal{P}_{\mathrm{H}}(\not{l}+\not{P}_4)], \tag{29}$$

($P_n \equiv \sum_{i=1}^n p_i$) で与えられる。このとき，loop 積分が $n=4$ で pole を出さないと $n=4$ で有限な寄与を与えないから，そして分母は $l=\underline{l}+r$ に関して 10 次であるから，(29) 中の伝播関数因子 $\not{l}$，$(\not{l}+\not{P}_1)$，$\cdots$，$(\not{l}+\not{P}_4)$ はすべて，$\not{r}$ か $\underline{\not{l}}$ としなければならない。しかし，$\gamma^a\mathcal{P}_{\mathrm{H}}$ 因子にはさまれた $(\not{l}+\not{P}_1)$, $(\not{l}+\not{P}_2)$, $(\not{l}+\not{P}_3)$ は $\not{r}$ にはできない。$\not{r}$ にすると γ_5 と可換になり $\gamma^\mu\mathcal{P}_{\mathrm{H}}\not{r}\gamma^\nu\mathcal{P}_{\mathrm{H}}=\gamma^\mu\not{r}\gamma^\nu\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{H}}\mathcal{P}_{\mathrm{H}}=0$ 等で 0 になるからである。また，loop 積分が 0 でない寄与を与えるには，初めの $\not{r}$ 因子以外にもう一つ $\not{r}$ が必要だから，それは (29) 中の $\not{l}$ か $(\not{l}+\not{P}_4)$ のどちらかから供給されねばならない。しかし，この二つの場合は，トレースの巡回対称性を使って $(\not{l}+\not{P}_4)$ を一番前に持ってくれば，

$$(\not{l}+\not{P}_4)\not{r}\gamma_5\not{l} \;\longrightarrow\; r^2\gamma_5\underline{\not{l}}+\underline{\not{l}}\gamma_5 r^2=0 \tag{30}$$

で相殺することがわかる。したがって，結局，五角形グラフはアノマリーに効かない。六角形以上のグラフは，もちろん，充分収束しているのでアノマリーを導かない。

以上の計算結果 (27), (28) は，(13), (15) 等を考慮すれば，アノマリーが

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\Gamma[A]&=\int d^4x\sum_{\mathrm{H}}\left(-\frac{i\epsilon_{\mathrm{H}}}{24\pi^2}\right)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}\left[C_{\mathrm{H}}\left\{\partial_\mu A_{\mathrm{H}\nu}\partial_\rho A_{\mathrm{H}\sigma}+\frac{1}{2}\partial_\mu(A_{\mathrm{H}\nu}A_{\mathrm{H}\rho}A_{\mathrm{H}\sigma})\right\}\right]\\&=\sum_{\mathrm{H}}\left(-\frac{i\epsilon_{\mathrm{H}}}{24\pi^2}\right)\int\mathrm{tr}\left[C_{\mathrm{H}}d\left(A_{\mathrm{H}}dA_{\mathrm{H}}+\frac{1}{2}A_{\mathrm{H}}^3\right)\right]\end{aligned} \tag{31}$$

で与えられることを意味している。これはゲージ群 $G=G_{\mathrm{R}}\times G_{\mathrm{L}}$ を特定しない最も一般的な結果である。特に，G が $U(1)$ を含まない非可換群 (半単純群) の場合は，この表式 (31) は，右手型 H=R，左手型 H=L のそれぞれ

で，前節 8-1 の (87) で与えた**非可換アノマリー**の形を正しく再現している。だから，この節では，全体の係数 $-i\epsilon_{\mathrm{H}}/24\pi^2$ だけを求めれば充分で，そのためには実は三角グラフだけを計算すればよかったのだが，念のため全部計算した。

カレント非保存則の形　(31) のアノマリーを，カレント非保存を表す (8) の形に書けば，$C_{\mathrm{H}}=\sum_a(-ig_a\sum_a c^a T_{\mathrm{H}}^a)$ に注意して，次のようになる：

$$D^\mu\langle J^a_{\mathrm{H}\mu}\rangle=\frac{\epsilon_{\mathrm{H}}}{24\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\left[g_a T_{\mathrm{H}}^a\partial_\mu\left\{A_{\mathrm{H}\nu}\partial_\rho A_{\mathrm{H}\sigma}+\frac{1}{2}A_{\mathrm{H}\nu}A_{\mathrm{H}\rho}A_{\mathrm{H}\sigma}\right\}\right]$$
$$(\mathrm{H}=\mathrm{R},\mathrm{L}) \tag{32}$$

この形のアノマリーは，左・右手型を対称に扱う形なので，俗に L-R 形 (L-R form) と呼ばれる。

群 G が**カイラル群**の場合，すなわち，G_{R} と G_{L} とが数学的に同じ群 $G_{\mathrm{R}}=G_{\mathrm{L}}$ の場合は，ゲージ場およびカレントの L, R 成分の和・差の組み換えで，ベクトル (V) 成分，軸性ベクトル (A) 成分を定義することができる：

$$V_\mu\equiv\frac{1}{2}(A_{\mathrm{R}\mu}+A_{\mathrm{L}\mu}),\qquad A_\mu\equiv\frac{1}{2}(A_{\mathrm{R}\mu}-A_{\mathrm{L}\mu}),$$
$$J^a_\mu\equiv J^a_{\mathrm{R}\mu}+J^a_{\mathrm{L}\mu}=g_a\bar{\psi}T^a\gamma_\mu\psi,\qquad J^{5a}_\mu\equiv J^a_{\mathrm{R}\mu}-J^a_{\mathrm{L}\mu}=g_a\bar{\psi}T^a\gamma_\mu\gamma_5\psi. \tag{33}$$

(32) の L-R 形アノマリーでは，このベクトル・カレント J^a_μ は，軸性ベクトル・カレント J^{5a}_μ と同様，保存していないことに注意しよう。ところが，前に述べたようにアノマリーには，有効作用 $\Gamma[A]$ に局所的項 $Y[A]$ を付け加えることによって，$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}Y[A]$ の形の自明な破れ分だけずらすことのできる任意性がある。この任意性を利用すれば，(33) のベクトル・カレント J^a_μ だけは保存するようにできる。これを見るため，(31) のアノマリーが，前節 9-1 (75) で説明した超場型式の Chern-Simons 5-form $\omega_5(\mathcal{A}_{\mathrm{H}},\mathcal{F}_{\mathrm{H}})=\omega_5(A_{\mathrm{H}}+C_{1\mathrm{H}},F_{\mathrm{H}})$ (H=R, L) の $C_{1\mathrm{H}}$ についての一次項 $\omega_4^1(C_{1\mathrm{H}},A_{\mathrm{H}})$ に一致していることに注意する。さらに，カイラル群の場合，$\mathcal{A}_{\mathrm{R}}$, $\mathcal{A}_{\mathrm{L}}$ は数学的に同じ Lie 代数の元とみなせるから，両者の間を

$$\mathcal{A}_t\equiv t\mathcal{A}_{\mathrm{R}}+(1-t)\mathcal{A}_{\mathrm{L}}\qquad 0\leqq t\leqq 1 \tag{34}$$

でつなぐことができ，$\omega_5(\mathcal{A},\mathcal{F})$ に対し Cartan のホモトピー公式 9-1 (61) を適用する。そうすれば，$\mathcal{A}_{\mathrm{H}}=A_{\mathrm{H}}+C_{1\mathrm{H}}$, $\mathcal{F}_{\mathrm{H}}=F_{\mathrm{H}}$, $\tilde{d}=d+\delta$ を用いて

$$\omega_5(A_{\mathrm{R}}+C_{1\mathrm{R}},F_{\mathrm{R}})-\omega_5(A_{\mathrm{L}}+C_{1\mathrm{L}},F_{\mathrm{L}})$$
$$=[k_{10}(d+\delta)+(d+\delta)k_{10}]\,\omega_5(\mathcal{A},\mathcal{F}) \tag{35}$$

を得る。カイラル群の場合，ちょうど，この左辺 (の $-i/24\pi^2$ 倍) の C_1 一

次項がアノマリー(31)である。重要な点は，右辺第1項 $k_{10}(d+\delta)\omega_5$ が，**9-1** (68),(60),(58) を用いて

$$k_{10}(d+\delta)\,\omega_5(\mathcal{A},\mathcal{F})=\int_0^1 dt\ k_t\ \mathrm{tr}\ \mathcal{F}_t^3=\int_0^1 dt\ 3\ \mathrm{tr}\,[(\mathcal{A}_{\mathrm{R}}-\mathcal{A}_{\mathrm{L}})\,\mathcal{F}_t^2]$$

$$=3\int_0^1 dt\ \mathrm{tr}\left[(\mathcal{A}_{\mathrm{R}}-\mathcal{A}_{\mathrm{L}})\{tF_{\mathrm{R}}+(1-t)\,F_{\mathrm{L}}+(t^2-t)(\mathcal{A}_{\mathrm{R}}-\mathcal{A}_{\mathrm{L}})^2\}^2\right] \quad (36)$$

となり，$\mathcal{A}_{\mathrm{R}}-\mathcal{A}_{\mathrm{L}}=A_{\mathrm{R}}-A_{\mathrm{L}}+C_{1\mathrm{R}}-C_{1\mathrm{L}}=2(A+C_{1A})$ であるから，ゴーストのベクトル成分 $C_{1V}=(C_{1\mathrm{R}}+C_{1\mathrm{L}})/2$ に依存していないこと，さらに，(35) 右辺第2項が4次元全微分項 $d(*)$ を除いて，$k_{10}\,\omega_5(\mathcal{A},\mathcal{F})$ の BRS 変換 $\delta=\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\cdot d\theta$ という“自明な破れ”の形をしていることである。したがって，もとの有効作用 $\Gamma[A]$ に

$$\mathcal{Y}(A)=-\frac{-i}{24\pi^2}k_{10}\,\omega_5(\mathcal{A},\mathcal{F})\big|_{C=0}$$

$$=+\frac{i}{24\pi^2}\int_0^1 dt\ k_t\ \mathrm{tr}\left(\mathcal{A}_t\,\mathcal{F}_t^2-\frac{1}{2}\mathcal{A}_t^3\mathcal{F}_t+\frac{1}{10}\mathcal{A}_t^5\right)\Big|_{C=0}$$

$$=+\frac{i}{48\pi^2}\ \mathrm{tr}\Big[(F_{\mathrm{R}}+F_{\mathrm{L}})(A_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{L}}-A_{\mathrm{L}}A_{\mathrm{R}})-(A_{\mathrm{R}}^3A_{\mathrm{L}}-A_{\mathrm{L}}^3A_{\mathrm{R}})$$

$$+\frac{1}{2}(A_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{L}}A_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{L}})\Big] \quad (37)$$

の積分 $Y[A]=\int\mathcal{Y}(A)$ を加えれば，そのアノマリーは，(35),(36) のゴースト一次項より

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}(\Gamma+Y)=\frac{-i}{4\pi^2}\int\mathrm{tr}\Big[C_A\Big\{F_V^2+\frac{1}{3}F_A^2$$

$$-\frac{4}{3}(F_VA^2+AF_VA+A^2F_V)+\frac{8}{3}A^4\Big\}\Big], \quad (38)$$

$$F_V\equiv\frac{1}{2}(F_{\mathrm{R}}+F_{\mathrm{L}}),\qquad F_{\mathrm{A}}\equiv\frac{1}{2}(F_{\mathrm{R}}-F_{\mathrm{L}}),\qquad C_A\equiv\frac{1}{2}(C_{\mathrm{R}}-C_{\mathrm{L}}),$$

となることがわかる。すなわち，この有効作用 $\Gamma+Y$ のアノマリーには，C_V が現れていないので，ベクトル・カレント J_μ^a は保存する：

$$D^\mu\langle J_\mu^a\rangle=0,$$

$$D^\mu\langle J_\mu^{5a}\rangle\,d^4x=\frac{1}{4\pi^2}\ \mathrm{tr}\Big[g_aT^a\Big\{F_V{}^2+\frac{1}{3}F_A{}^2$$

$$-\frac{4}{3}(F_VA^2+AF_VA+A^2F_V)+\frac{8}{3}A^4\Big\}\Big]. \quad (39)$$

この形のアノマリー(38)または(39)を，V-A 形あるいは Bardeen (バー

ディーン) 形と呼ぶ。

アノマリーは，もともと，ゲージ場としてはベクトル型ゲージ場 V_μ のみが存在する系において，$U(1)$ 軸性カレント $j^5_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ が保存しなくなる現象として，Adler (アドラー), Bell (ベル)-Jackiw (ジャキーフ) により初めて明確な形で認識された。これが**可換アノマリー**と呼ばれるもので，この場合ベクトル・カレントは保存するように正則化されるから，Bardeen 形アノマリー (39) の第 2 式で $g_a T^a = 1$, $A = F_A = 0$ とおいた特殊な場合に相当する†：

$$\partial^\mu \langle j^5_\mu \rangle = \frac{1}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\,[F_{V\mu\nu}F_{V\rho\sigma}]$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\left[\partial_\mu\left(V_\nu\partial_\rho V_\sigma + \frac{2}{3}V_\nu V_\rho V_\sigma\right)\right]. \tag{40}$$

この可換アノマリーの，Bardeen 形を経由した導出は幾分複雑で人為的に見えるかもしれないが，それは単に我々の採用した正則化手続きのせいであることに注意しておこう。我々の正則化手続きのうち特に (12)，$\mathcal{L}_\psi \to \hat{\mathcal{L}}_\psi$ の置き換え，のせいでまず L-R 形アノマリーが出たのである。実際，ベクトル型ゲージ場のみの系なら，もとの Lagrangian のまま計算すれば，次元正則化でも直接 (40) の結果が得られる。例えば，V について 2 次のアノマリー項は，9·1 図の三角グラフで μ 頂点が軸性ベクトル，ν, ρ 頂点がベクトルのものを計算すればよく，それは (22) で単にカイラル射影 $\mathcal{P}_\mathrm{H}$ を 1 に置き換えたものになる。その評価は，(24) の I_1 積分の値 (26) を用いれば，すぐに (40) の正しい係数 $1/4\pi^2$ を与えることがわかる。(演習問題 9.6 参照。)

アノマリー非存在のための一般的条件　上の (31) で全く一般的な場合のアノマリーの表式を得たので，今や，任意のゲージ理論においてアノマリーが存在しない条件を一般的に述べることができる。これは，ゲージ理論が無矛盾であるための必要条件で，現実的な模型を作る際に大変重要な条件となる††。

一般に，カイラル・フェルミオン $\psi = (\psi_\mathrm{R}, \psi_\mathrm{L})$ に対し

$$\mathcal{L}_\mathrm{int} = A^a_\mu(\bar{\psi}_\mathrm{R}\gamma^\mu\mathcal{P}_+ T^a_\mathrm{R}\psi_\mathrm{R} + \bar{\psi}_\mathrm{L}\gamma^\mu\mathcal{P}_- T^a_\mathrm{L}\psi_\mathrm{L}) \tag{41}$$

---

† (40) では，$F = (1/2)F_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ の因子 1/2 に注意。

†† 誤解のないようにいっておくと，例えば QCD における $U(1)$ 軸性カレントのアノマリーのように，ゲージ場の結合していないカレントには，いくらアノマリーが存在しても理論の無矛盾性に抵触しない。

の形で結合しているゲージ場 A_μ^a を考える。(31) の導出では，ψ_R に結合するゲージ場 $A_{\mathrm{R}\mu}^a$ と ψ_L に結合する $A_{\mathrm{L}\mu}^a$ とは一般に別物としたが，(41) のような場合には単に $A_{\mathrm{R}\mu}^a=A_{\mathrm{L}\mu}^a=A_\mu^a$ と同一視すればよい。アノマリーは場の 3 次項が決まれば，高次項は Wess-Zumino 無矛盾性条件で一意的に決まっているから，アノマリーは場の 3 次項が消えていれば存在しない。(41) のタイプのゲージ場の $A_\mu^a A_\nu^b A_\sigma^c$ 頂点の三角グラフのアノマリーは，(31) より

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}c^a\partial_\mu A_\nu^b\partial_\rho A_\sigma^c[\mathrm{tr}(T_\mathrm{R}^a T_\mathrm{R}^b T_\mathrm{R}^c)-\mathrm{tr}(T_\mathrm{L}^a T_\mathrm{L}^b T_\mathrm{L}^c)]$$
$$=\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}c^a\partial_\mu A_\nu^b\partial_\rho A_\sigma^c\frac{1}{2}[\mathrm{tr}(T_\mathrm{R}^a\{T_\mathrm{R}^b, T_\mathrm{R}^c\})-\mathrm{tr}(T_\mathrm{L}^a\{T_\mathrm{L}^b, T_\mathrm{L}^c\})] \tag{42}$$

に比例するから，このゲージ場のアノマリーが存在しないための必要十分条件は

$$d^{abc}\equiv\mathop{\mathrm{tr}}_{\mathrm{R-L}}(T^a\{T^b, T^c\})\equiv\mathrm{tr}(T_\mathrm{R}^a\{T_\mathrm{R}^b, T_\mathrm{R}^c\})-\mathrm{tr}(T_\mathrm{L}^a\{T_\mathrm{L}^b, T_\mathrm{L}^c\})$$
$$\equiv d_\mathrm{R}^{abc}-d_\mathrm{L}^{abc} \tag{43}$$

が 0 になることであることがわかる。

アノマリーのない特徴的な例をいくつか掲げよう：

i） **ベクトル的 (vector-like) な場合**：右手型の表現 T_R と左手型の表現 T_L とが同値，すなわち，あるユニタリー行列があって

$$T_\mathrm{L}^a=UT_\mathrm{R}^aU^\dagger \tag{44}$$

となる場合，フェルミオンの表現はベクトル的と呼ばれ，明らかに，$d_\mathrm{R}^{abc}=d_\mathrm{L}^{abc}$ であってアノマリーは 0 となる。この場合は，実は，(41) の相互作用 $\mathcal{L}_\mathrm{int}$ は，もとの場 $\psi=\mathcal{P}_+\psi_\mathrm{R}+\mathcal{P}_-\psi_\mathrm{L}$ の代わりに新しい変数 $\psi'\equiv\mathcal{P}_+\psi_\mathrm{R}+\mathcal{P}_-U^\dagger\psi_\mathrm{L}$ で書きかえれば，

$$\mathcal{L}_\mathrm{int}=A_\mu^a\bar{\psi}'\gamma^\mu T_\mathrm{R}^a\psi' \tag{45}$$

のように完全にベクトル型になるのでアノマリーがないのである。

ii） **実表現 (real representation) の場合**：群のある表現 iT^a が，その複素共役表現 $(iT^a)^*=-iT^{a*}$ と同値，すなわち

$$T^a=-UT^{a*}U^\dagger \tag{46}$$

の場合，その表現は実表現と呼ばれる。実表現の場合

$$\mathrm{tr}(T^a\{T^b, T^c\})=-\mathrm{tr}(T^{a*}\{T^{b*}, T^{c*}\})=-\mathrm{tr}(\{T^{c\dagger}, T^{b\dagger}\}T^{a\dagger})$$
$$=-\mathrm{tr}(T^a\{T^b, T^c\})=0 \qquad (\because\quad T^{a\dagger}=T^a) \tag{47}$$

となるから，右手型表現 T_R，左手型表現 T_L が共に実表現なら $d_\mathrm{R}^{abc}=d_\mathrm{L}^{abc}=0$ でアノマリーがない。実表現の例としては，例えば，$SU(n)$ 群の場

合，随伴表現 $\boldsymbol{n}^2-\mathbf{1}$ や，基本表現とその複素共役表現の直和 $\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}^*$，など。

iii) **アノマリーを持たない群**: 単純群は，$SU(n)$, $SO(n)$, $USp(2n)$ の古典群と，G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 の例外群とですべてであるが，このうち†，

$$\begin{aligned}&SU(2)\,(\simeq SO(3)\simeq USp(2))\\&SO(n)\ (n\geqq 3)\qquad (\text{ただし } n=6 \text{ の } SO(6)\simeq SU(4) \text{ を除く})\\&USp(2n)\ (n\geqq 1)\qquad (USp(4)\simeq SO(5) \text{ である})\\&G_2, F_4, E_6, E_7, E_8\end{aligned} \tag{48}$$

は，どの表現もアノマリーを持たない††ことが知られている。それゆえ，これらの単純群，またはその直積で与えられる半単純群に基づいたゲージ理論はすべてアノマリーを持たない。アノマリーを持つ可能性のある危険な因子群は，したがって，$U(1)$ 群 $(\simeq SO(2))$ と，$SU(n)\,(n\geqq 3)$ のみである。

以上掲げた i)〜iii) の例は，もちろん，アノマリー非存在の単に十分条件であって，そのすべての可能性を尽くすものではない。例えば，6-7 で議論した Weinberg-Salam 模型での，レプトン・クォーク間のアノマリー相殺は，上の i)〜iii) のどれにも対応しない“偶然的”なものである†††。

藤川の方法 上では，通常の摂動論の Feynman グラフに基づくアノマリーの計算法を述べたが，これとは別に，藤川の方法と呼ばれる計算法がある。この方法は，経路積分においてゲージ変換と同じ形の変数変換を行う際の Jacobian (ヤコビアン) としてアノマリーを導出するもので，計算法として有用であるばかりでなく，アノマリーの位相幾何学的意味との関連も明らかにする興味深い方法である。

後の位相幾何学的意味付けを考慮して，ここで，Minkowski 空間から Euclid 空間 R^4 に移っておくことにする††††:

$$ix^0=x^4,\qquad A_0=iA_4,\qquad i\gamma^0\equiv\gamma^4. \tag{49}$$

そうすれば，$\gamma^\mu D_\mu=\gamma^\mu(\partial_\mu+\sum_\alpha A_\mu^{(\alpha)}\Gamma_{(\alpha)})$ は，$\gamma^0D_0=\gamma^4D_4$ で，$\gamma^1\sim\gamma^4$ がすべて反 hermite になるから，hermite 演算子となる。γ_5 ももちろん

† $SO(4)$ は，$\simeq SU(2)\times SU(2)$ で単純群でないが一括して入れておいた。

†† (48) の群のうち，$SO(n)$ の $n=4k+2$ の場合および E_6 以外の群には実表現しか存在しない。複素表現の存在する $SO(4k+2)$ や E_6 の場合でも，$SO(6)$ 以外は，(43) の d^{abc} が一般に 0 となってアノマリーが存在しないことが示せる。

††† この“偶然性”は，しかし，大統一理論においてレプトン・クォークが，例えば $SO(10)$ の一つの多重項に統一された段階で，上の iii) の例として自然な形で理解できるようになる。

†††† ここでは，単にこれから Euclid 空間上の場の理論を考えようというだけのことで，決してそれが我々の Minkowski 空間上の理論と何らかの“解析接続”でつながっていると主張しているわけではない。以下述べる藤川の計算法自体は直接 Minkowski 空間上で行っても意味付けを与えることができるかもしれない。

hermite にとどまる：

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^4\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4. \tag{50}$$

まず，可換アノマリー(40)をこの方法で導くべく，単純群 G のベクトル型結合のゲージ場のみの場合，$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$，を考えよう：

$$e^{\Gamma[A]} = \int \mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\,\exp\left(\int d^4x\ \bar{\psi} i \not{D} \psi\right). \tag{51}$$

ここで $\Gamma[A]$ や d^4x は，Euclid 版で $\Gamma_{\mathrm{E}}[A]$, d^4x_{E} とすべきものであるが，煩雑だから E の添字は省略する。この系(51)で，局所的な無限小 $U(1)$ カイラル変換

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)\gamma_5}\psi(x) = \psi + i\alpha(x)\gamma_5\psi \\ \bar{\psi}(x) &\longrightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{i\alpha(x)\gamma_5} = \bar{\psi} + \bar{\psi} i\gamma_5\alpha(x) \end{aligned} \qquad (\alpha(x) \ll 1) \tag{52}$$

と同じ形の経路積分変数変換を行ってみる。そうすれば，(51)の被積分関数の指数部の作用積分は次の変化を受ける：

$$\int d^4x\,\bar{\psi} i\not{D}\psi \longrightarrow \int d^4x\,\bar{\psi} i\not{D}\psi + \int d^4x\,\alpha(x)\partial^\mu j^5_\mu. \qquad (j^5_\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) \tag{53}$$

もし積分測度が(52)の下で不変，$\mathcal{D}\psi'\,\mathcal{D}\bar{\psi}' = \mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}$，ならば，もちろん，(51)の経路積分は変数変換で値を変えないので変化分 $\int d^4x\,\alpha(x)\partial^\mu\langle j^5_\mu\rangle$ は 0 であり，保存則 $\partial^\mu\langle j^5_\mu\rangle = 0$ が従い，アノマリーがないことを意味する。ところが，一般には積分測度は変数変換で Jacobian 因子の変化を受けるから，この Jacobian が 1 でなければアノマリーが存在することになる。それゆえ，藤川の方法では，アノマリーの計算が Jacobian 因子の計算に帰着されるのである。

変数変換(52)の下での Jacobian を求めるには，経路積分測度 $\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}$ をもう少し正確に定義しておく必要がある。そこで，hermite 演算子 $\not{D}$ の固有ベクトルの完全系 $\{\varphi_n\}$

$$\not{D}\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, \qquad (\varphi_n^\dagger, \varphi_m) \equiv \int d^4x\ \varphi_n^\dagger(x)\,\varphi_m(x) = \delta_{nm}, \tag{54}$$

で，$\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ を展開し

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_n a_n\varphi_n(x), \qquad a_n = (\varphi_n^\dagger, \psi), \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_n \varphi_n^\dagger(x)\,\bar{b}_n, \qquad \bar{b}_n = (\bar{\psi}, \varphi_n), \end{aligned} \tag{55}$$

その Grassmann 係数 a_n, $\bar{b}_n$ を用いて，積分測度を次のように定義する：

$$\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi} \equiv \prod_n da_n\,d\bar{b}_n \tag{56}$$

こう書くときには，まず，レベル添字 n の充分大きいところ N までの有限個の積分にしておいて，次に $N\to\infty$ の極限をとる，という意味に解すべきである。こうすれば，積分変数 a_n は，変数変換 (52) の下で

$$\begin{aligned}a'_n&\equiv(\varphi_n^\dagger,\psi')=\int d^4x\ \varphi_n^\dagger(x)(1+i\alpha(x)\gamma_5)\sum_m a_m\varphi_m(x)=\sum_m M_{nm}a_m\\M_{nm}&=\delta_{nm}+i\int d^4x\ \alpha(x)\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_m(x)\end{aligned}\tag{57}$$

と変換し，b_n も同様に $\bar{b}'_n=\sum_m \bar{b}_m M_{mn}$ と変換するから

$$\prod_n da'_n d\bar{b}'_n=\det{}^{-1}M\cdot\det{}^{-1}M^T\prod_n da_n d\bar{b}_n=\det{}^{-2}M\prod_n da_n d\bar{b}_n\tag{58}$$

を得る。この Jacobian $\det^{-2}M$ は，$\alpha(x)\ll 1$ であるから付録 D(8) の公式 $\det(1+\varepsilon X)=\exp[\varepsilon\,\mathrm{tr}\,X+O(\varepsilon^2)]$ を適用して，次式となる：

$$\begin{aligned}\det{}^{-2}M&=\exp\left(-2i\int d^4x\ \alpha(x)\sum_n\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x)\right)\\&\equiv\exp\left(-2i\int d^4x\ \alpha(x)\mathcal{A}(x)\right).\end{aligned}\tag{59}$$

ここでのトレース和 $\sum_n$ は発散しているので，(56) の下で述べたことに対応して大きな固有値 $\lambda_n\gg\Lambda$ のところを Gauss 切断する正則化を行い，しかる後に平面波基底 $\{e^{ikx}\}$ に移って評価する：

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x)&=\lim_{\Lambda\to\infty}\left(\sum_n\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5 e^{-(\lambda_n/\Lambda)^2}\varphi_n(x)\right)\\&=\lim_{\Lambda\to\infty}\left(\lim_{y\to x}\mathrm{tr}\left[\gamma_5 e^{-(\not{D}/\Lambda)^2}\sum_n\varphi_n(x)\varphi_n^\dagger(y)\right]\right)\\&=\lim_{\Lambda\to\infty}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}[\gamma_5 e^{-ikx}e^{-(\not{D}/\Lambda)^2}e^{ikx}]\\&=\lim_{\Lambda\to\infty}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}\left[\gamma_5\exp\left\{\frac{-1}{\Lambda^2}\left([ik_\mu+D_\mu]^2+\frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}(x)\right)\right\}\right]\\&=\lim_{\Lambda\to\infty}\mathrm{tr}\left[\gamma_5\left(\frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}(x)\right)^2\right]\left(\frac{-1}{\Lambda^2}\right)^2\frac{1}{2!}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-k^\mu k^\mu/\Lambda^2}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{16\pi^2}\right)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}).\end{aligned}\tag{60}$$

ただし，3 行目から 4 行目へは，$e^{-ikx}D_\mu e^{ikx}=D_\mu+ik_\mu$，$\gamma^\mu\gamma^\nu D_\mu D_\nu=\gamma^\mu\gamma^\nu((1/2)\{D_\mu,D_\nu\}+(1/2)[D_\mu,D_\nu])=g^{\mu\nu}D_\mu D_\nu+(1/4)[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}$ などの変形を使った。今 $g^{\mu\nu}=\mathrm{diag}(-1,-1,\cdots,-1)$ なので $(k_\mu)^2=k^\mu k_\mu=-k^\mu k^\mu\leqq 0$ にも注意せよ。また，Euclid 版完全反対称テンソル $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は $\epsilon^{1234}=+1$ と定義するので，$\mathrm{tr}[\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma]=-4\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ が従う。これは，

Minkowski 版の公式 $\mathrm{tr}[\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma]=-4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ と比べて i だけ異なるので，(60) は Minkowski でのアノマリーと**見かけ上** i の因子だけ異なっていることに注意しておこう。

この計算は，すぐに任意の偶数次元時空の場合に拡張できる。時空 $2n$ 次元の場合，Euclid 版を，4 次元の (49), (50) と同様な拡張として†

$$\begin{aligned} &ix^0=x^{2n}, \quad A_0=iA_{2n}, \quad i\gamma^0=\gamma^{2n}, \\ &\gamma_5\equiv i^n\gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^{2n-1}\gamma^{2n}, \qquad (\gamma_5{}^\dagger=\gamma_5) \end{aligned} \tag{61}$$

$\epsilon^{12\cdots 2n}=+1$，ととる。そうすれば，$\gamma_5$ は $2n$ 個以上の γ^μ 行列の積とのみ 0 でないトレースを持ち得るので，(60) の計算の第 5, 6 行目を次のように変更するだけでよい：

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x)&=\lim_{\Lambda\to\infty}\mathrm{tr}\left[\gamma_5\left(\frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}\right)^n\right]\left(\frac{-1}{\Lambda^2}\right)^n\frac{1}{n!}\int\frac{d^{2n}k}{(2\pi)^{2n}}e^{-k^\mu k^\mu/\Lambda^2} \\ &=\frac{i^n}{2^n(2\pi)^n n!}\epsilon^{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n}\mathrm{tr}(F_{\mu_1\nu_1}F_{\mu_2\nu_2}\cdots F_{\mu_n\nu_n}). \end{aligned} \tag{62}$$

変数変換 (52) の下での，作用の変化 (53) と Jacobian の変化 (59) の和は，積分の不変性より 0 であるから，

$$\partial^\mu\langle j_\mu^5\rangle=2i\,\mathcal{A}(x) \tag{63}$$

が従う。この $\mathcal{A}(x)$ に (60) を入れたものは，$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ の見かけ上の違いの i 倍をしてやれば，先に Feynman グラフの計算で求めた可換アノマリーの表式 (40) にぴったり一致していることがわかる。

次に，右手型 Weyl フェルミオンが単純群のゲージ場に結合している系での非可換アノマリーを，この方法で計算しよう。この場合の有効作用 $\Gamma[A]$ は (51) 式において $\not{D}$ の代わりに

$$\not{D}_+\equiv\gamma^\mu(\partial_\mu+A_\mu)\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\equiv\not{D}\frac{1}{2}(1+\gamma_5), \tag{64}$$

を入れた式で定義される。しかし，この演算子 $\not{D}_+$ は，カイラリティ (γ_5) が $+1$ のスピノールを，カイラリティ -1 のスピノールに移すので，固有値問題がうまく定義できない。この問題を避けるために，カイラリティが -1 のセクターも加えて，有効作用 $\Gamma[A]$ を次のように定義し直す：

$$\begin{aligned} &e^{\Gamma[A]}=\int\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\,\exp\left(\int d^4x\;\bar{\psi}i\hat{\not{D}}\psi\right), \\ &\hat{\not{D}}\equiv\gamma^\mu\left(\partial_\mu+A_\mu\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\right)=\not{\partial}_-+\not{D}_+, \qquad \left(\not{\partial}_-\equiv\not{\partial}\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\right) \end{aligned} \tag{65}$$

---

† このカイラリティの γ_5 を，γ^μ の 5 次元目の成分 γ^5 と混同しないように。

これは，前の摂動計算のときの(12)，$\mathcal{L}_\psi \to \hat{\mathcal{L}}_\psi$ の“正則化”と同じで，手で加えた負カイラリティ部分はゲージ場 A_μ と結合していないから，有効作用 $\Gamma[A]$ を変えない。しかし，$\hat{\not{D}}$ 自体は，今や，Dirac スピノールの空間で well-defined な固有値問題を与える。ただ注意すべきは，$\hat{\not{D}}$ が hermite な演算子でない点であり，必ずしも固有ベクトルが完全系を張ることが保証されていない。しかし，この固有ベクトルの完全性が破れるのは，$\hat{\not{D}}$ の固有値にまず縮退があって，その上ある条件が成り立つという特殊な場合のみであることに注意する。すなわち問題があり得るのは，ゲージ場の関数空間 $\{A_\mu\}$ 中でかなり例外的な関数 A_μ に対してのみなのである。それゆえ，ここではそのような特殊な場合を除くことにして，$\hat{\not{D}}$ の固有ベクトルの完全性を仮定して進む。一般に，hermite でない演算子の固有ベクトルは，右固有ベクトル φ_n と左固有ベクトル $\chi_n^\dagger$ が別物である；すなわち，

$$
\begin{aligned}
&\hat{\not{D}}\varphi_n=\lambda_n\varphi_n,\\
&\chi_n^\dagger\hat{\not{D}}=\chi_n^\dagger\lambda_n\ (\text{または}\ \hat{\not{D}}^\dagger\chi_n=\lambda_n^*\chi_n),\\
&(\chi_n^\dagger,\varphi_m)\equiv\int d^4x\ \chi_n^\dagger(x)\,\varphi_m(x)=\delta_{nm}.
\end{aligned}
\tag{66}
$$

この固有ベクトルの基底 $\{\varphi_n\},\{\chi_n^\dagger\}$ で，ψ, $\bar{\psi}$ を展開して，

$$
\begin{aligned}
&\psi=\sum_n a_n\varphi_n, \qquad a_n=(\chi_n^\dagger,\psi),\\
&\bar{\psi}=\sum_n \chi_n^\dagger\,\bar{b}_n, \qquad \bar{b}_n=(\bar{\psi},\varphi_n),
\end{aligned}
\tag{67}
$$

前と同様に，測度 $\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}$ を $\prod_n da_n\,d\bar{b}_n$ で定義する。

そこで，BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}A_\mu=dC+[A_\mu,C]\equiv DC$ の下での，(65)の有効作用 $\Gamma[A]$ の変化 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\Gamma[A]$ を計算する。このとき，(65)の積分変数 ψ, $\bar{\psi}$ に対しても同時に

$$
\begin{aligned}
&\psi \longrightarrow \psi'=\psi-C\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi,\\
&\bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}'=\bar{\psi}+\bar{\psi}\frac{1}{2}(1-\gamma_5)C
\end{aligned}
\tag{68}
$$

の変数変換を行えば，(65)の指数部 $\bar{\psi}i\hat{\not{D}}\psi$ は不変にとどまるから，$\Gamma[A]$ の変化は，積分測度 $\mathcal{D}\psi'\,\mathcal{D}\bar{\psi}'=J\,\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}$ の Jacobian J からの寄与のみとなる。この Jacobian を前の(57)～(59)と同様に評価すれば，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\Gamma[A]&=-\int d^4x\; c^a D_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a}\\ &=\int d^4x \sum_n \chi_n^\dagger(x)C(x)\gamma_5\varphi_n(x)\\ &=\int d^4x\,\mathrm{tr}\Big[C(x)\gamma_5\sum_n\varphi_n(x)\chi_n^\dagger(x)\Big]\\ &=\int d^4x \lim_{\Lambda\to\infty}\mathrm{tr}\big[C(x)\gamma_5 e^{-\hat{\mathcal{D}}^2/\Lambda^2}\big]\end{aligned}\tag{69}$$

を得る。このトレース部分に対し，$\hat{\mathcal{D}}=\not{\partial}_-+\not{D}_+$ を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\big[C\gamma_5 e^{-\hat{\mathcal{D}}^2/\Lambda^2}\big]&=\mathrm{tr}\Big[C\Big(\frac{1}{2}(1+\gamma_5)-\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\Big)e^{-(\not{\partial}_-\not{D}_++\not{D}_+\not{\partial}_-)/\Lambda^2}\Big]\\ &=\mathrm{tr}\Big[C\Big(\frac{1}{2}(1+\gamma_5)e^{-\not{\partial}\not{D}/\Lambda^2}-\frac{1}{2}(1-\gamma_5)e^{-\not{D}\not{\partial}/\Lambda^2}\Big)\Big]\\ &=\mathrm{tr}\Big[C\gamma_5\frac{1}{2}\big(e^{-\not{\partial}\not{D}/\Lambda^2}+e^{-\not{D}\not{\partial}/\Lambda^2}\big)\Big]\\ &\qquad+\mathrm{tr}\Big[C\frac{1}{2}\big(e^{-\not{\partial}\not{D}/\Lambda^2}-e^{-\not{D}\not{\partial}/\Lambda^2}\big)\Big]\end{aligned}\tag{70}$$

の変形をすれば，指数部の演算子から γ_5 をなくすことができ便利である。これを再び前の (60) と同様，平面波基底 $\{e^{ikx}\}$ を用いて評価するのだが，(70) の最後のトレース項は γ_5 を含まず $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ に比例する真のアノマリーには寄与しないから捨ててよく，γ_5 に比例する第1トレース項のみを計算すればよい†。そうすれば，γ_5 比例項のうち初めの $e^{-\not{\partial}\not{D}/\Lambda^2}$ を含む項は，$\int d^4k/(2\pi)^4$ の被積分関数が

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\Big[C\frac{1}{2}\gamma_5 e^{-ikx}e^{-\not{\partial}\not{D}/\Lambda^2}e^{ikx}\Big]&=\mathrm{tr}\Big[C\frac{1}{2}\gamma_5 e^{-ikx}e^{-(\partial\cdot D+2\sigma\cdot\partial A)/\Lambda^2}e^{ikx}\Big]\\ =e^{-(ik)^2/\Lambda^2}\,\mathrm{tr}\Big[C\frac{1}{2}\gamma_5\exp\Big\{-\frac{1}{\Lambda^2}&[ik\cdot(2\partial+A)+\partial\cdot D\\ &+2\sigma\cdot(ikA+\partial A)]\Big\}\Big]\end{aligned}\tag{71}$$

となる。ただし，$\partial\cdot D\equiv\partial^\mu D_\mu$，$\sigma\cdot(ikA+\partial A)\equiv\sigma^{\mu\nu}(ik_\mu A_\nu+\partial_\mu A_\nu)$，$\sigma^{\mu\nu}\equiv(1/4)[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$ の記号を用いた。微分演算子 ∂ はどれもまだ演算子のままで，たとえ ∂A と書かれていても $\partial A=(\partial A)+A\partial$ のようにずっと後ろま

---

† 実際，(70) の最後の項の寄与は 0 ではなく，例えば $\Lambda^2\,\mathrm{tr}[C\partial^\mu A_\mu]$ のような発散項さえ含んでいる。しかし，それらの寄与は，$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\{(1/2)\Lambda^2\,\mathrm{tr}[A^\mu A_\mu]\}$ のように自明な形の“アノマリー”で，皆，ゲージ場の局所的相殺項を作用積分に加えることにより消去できる。

で掛かるものである。(71) で exp を展開し，$\Lambda\to\infty$ で 0 にならず，$\mathrm{tr}[\gamma_5\cdots]$ で生き残る項のみ書き出せば，

$$
\begin{aligned}
(71)=e^{-(ik)^2/\Lambda^2}\,\mathrm{tr}\Big[C\frac{1}{2}\gamma_5\Big\{&\frac{1}{2!}\Big(\frac{-2}{\Lambda^2}\Big)^2[\sigma\cdot(ikA+\partial A)]^2\\
&+\frac{1}{3!}\Big(\frac{-1}{\Lambda^2}\Big)^3[\,2^3(\sigma\cdot ikA)^2(\sigma\cdot\partial A)|_{3\text{項}}\\
&\qquad+2^2(ik\cdot(2\partial+A)(\sigma\cdot ikA)(\sigma\cdot\partial A)|_{3!\text{項}}]\\
&+\frac{1}{4!}\Big(\frac{-1}{\Lambda^2}\Big)^4[\,2^4(\sigma\cdot ikA)^4+2^3(\sigma\cdot ikA)^3\,ik\cdot(2\partial+A)|_{4\text{項}}\\
&\qquad+2^2(\sigma\cdot ikA)^2(ik\cdot(2\partial+A))^2|_{6\text{項}}]\Big\}\Big]
\end{aligned}
\tag{72}
$$

となる。[(70) の γ_5 比例項の 2 番目の $e^{-\not{D}\not{\partial}/\Lambda^2}$ を含む項の場合は，この (72) で，単に $\sigma\cdot ikA$ を $\sigma\cdot Aik$ に，$\sigma\cdot\partial A$ を $\sigma\cdot A\partial$ にすればよい。] ここで $X^2Y|_{3\text{項}}$ のような記号は，積の因子の対称化を表し，例えば $X^2Y|_{3\text{項}}=X^2Y+XYX+YX^2$ を意味する。(72) の $\int d^4k/(2\pi)^4$ 積分およびトレース計算は少し面倒であるが，真面目に遂行すれば次の結果が得られる (演習問題 9.7)：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\Gamma[A]|_{\gamma_5\text{部分}}&=\frac{-1}{24\pi^2}\int d^4x\,\mathrm{tr}\Big[C\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\partial_\mu\Big(A_\nu\partial_\rho A_\sigma+\frac{1}{2}A_\nu A_\rho A_\sigma\Big)\Big]\\
&=\frac{-1}{24\pi^2}\int\mathrm{tr}\Big[C\,d\Big(AdA+\frac{1}{2}A^3\Big)\Big].
\end{aligned}
\tag{73}
$$

この結果もまた，Euclid 版であることを考慮して i 倍してやれば，Feynman グラフの計算による非可換アノマリーの結果 (31) と一致している。

アノマリーの位相幾何学的側面　可換アノマリー (63)，$\partial^\mu\langle j^5_\mu\rangle=2i\mathcal{A}$，の量 $\mathcal{A}(x)$ に関して，予告しておいたように藤川の方法は，その位相幾何学的意味を直接明らかにしてくれる。すなわち，等式 (59) は，変換パラメータ $\alpha(x)$ が x によらない定数となる極限で

$$
\int d^4x\;\mathcal{A}(x)=\int d^4x\sum_n\varphi_n^\dagger(x)\,\gamma_5\,\varphi_n(x)
\tag{74}
$$

を与える。$\not{D}\varphi_n=\lambda_n\varphi_n$ なら $\not{D}\gamma_5\varphi_n=-\lambda_n\gamma_5\varphi_n$ であるから，$\lambda_n\neq0$ の固有値に属する φ_n は，固有値 $-\lambda_n$ に属する $\gamma_5\varphi_n$ とは直交し，(74) の右辺にはことごとく効かない。それゆえ，零固有値に属する固有関数 φ_{0i}——零モードのみが効き得て，それらはカイラリティ γ_5 も同時に指定できる

ので，(74) 右辺は

$$\int d^4x\left(\sum_{i=1}^{n_+}\varphi_{0i}^{(+)\dagger}(x)\,\varphi_{0i}^{(+)}(x)-\sum_{i=1}^{n_-}\varphi_{0i}^{(-)\dagger}(x)\,\varphi_{0i}^{(-)}(x)\right)=n_+-n_- \tag{75}$$

$$(\not{D}\varphi_{0i}^{(\pm)}=0,\qquad \gamma_5\,\varphi_{0i}^{(\pm)}=\pm\,\varphi_{0i}^{(\pm)})$$

となる。すなわち，カイラリティ正の零モードの数 n_+ とカイラリティ負の零モードの数 n_- の差となり，この数 n_+-n_- は，Dirac 演算子 $\not{D}$ の指数 (index) と呼ばれ，$\mathrm{ind}(\not{D})$ と記される。したがって，上の (74) および (60) は，指数 $\mathrm{ind}(\not{D})$ の密度が，ゲージ場の関数で与えられる可換アノマリー密度 $\mathcal{A}(x)=(-1/32\pi^2)\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma})$ と等しいことを示しており，特にその積分は，(2-form $F\equiv(1/2)\,F_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu$ を用いて)

$$\mathrm{ind}(\not{D})=\frac{-1}{8\pi^2}\int\mathrm{tr}(FF) \tag{76}$$

を意味している。一般の $2n$ 次元空間の場合は，(62) を用いて

$$\mathrm{ind}(\not{D}_{2n})=\frac{i^n}{(2\pi)^n\,n!}\int\mathrm{tr}(F^n) \tag{77}$$

が得られる。この (76) や (77) は，正に，数学で Atiyah (アティヤ)-Singer (シンガー) 指数定理として知られている定理を再現している。数学の方では，もう少し抽象的に，Chern 指標 (character) と呼ばれる form

$$\mathrm{ch}(V)\equiv\mathrm{tr}\left[\exp\left(\frac{i}{2\pi}F\right)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i^n}{(2\pi)^n\,n!}\right)\mathrm{tr}(F^n) \tag{78}$$

を導入して†，もう少し一般的に $\mathrm{ind}(\not{D})=\int_{M^{2n}}\mathrm{ch}(V)$ と書く。$\mathrm{ch}(V)$ を $2n$ 次元多様体 M^{2n} 上で積分すれば，ちょうど (78) の F の n 次の $2n$-form が選ばれ，(77) や (76) に一致するのである。

ここで重要な点は，(76), (77) の右辺の積分は，ゲージ場 A_μ の連続変形によってその値を変えない位相幾何学的不変量 (topological invariant) であることで，それを整数に規格化する係数 $i^n/(2\pi)^n\,n!$ は，純粋に幾何学的に決められるということである。上では，この係数を Feynman グラフや Jacobian を計算して求めたのだが，実は，可換アノマリーにはこのような位相幾何学的意味があって，そもそも可能な係数 (の最小単位) は決まっていたわけである。

それでは，非可換アノマリーにもこのような幾何学的意味があるのだろ

---

† (78) の V は，その中で接続場としてのゲージ場が定義されているベクトル束 (vector bundle) を指すが，ここでは気にしないでよい。

うか？ (31) や (73) で求めたその係数も幾何学的に決まっているのか？ 答は yes である。前節の代数的側面の話で既に現れたように，$2n$ 次元空間における非可換アノマリー $\omega^1_{2n}(C,A)$ は，ゲージ不変な $(2n+2)$-form $\mathrm{tr}\,F^{n+1}$ から導かれた。ところが，後者 $\mathrm{tr}\,F^{n+1}$ は $2n+2$ 次元空間での可換アノマリーであり，このことから，**$2n$ 次元での非可換アノマリーが $2n+2$ 次元での可換アノマリーと直接関係づけられる**ことが示唆される。実際，このことが可能で，詳細には立入る余裕がないが，$2n$ 次元でのゲージ場 $A(x)$ を，1 パラメータ θ を含むゲージ変換 $A^\theta=g^{-1}(\theta)Ag(\theta)+g^{-1}(\theta)d_xg(\theta)$ $(g(0)=g(2\pi)=1)$ やスケール倍 tA^θ を利用して $2n+2$ 次元のゲージ場 $\mathcal{A}(x,\theta,t)$ に拡張し，$2n+2$ 次元 Dirac 演算子 $D\!\!\!/_{2n+2}=\gamma^M(\partial_M+\mathcal{A}_M)$ の指数

$$\mathrm{ind}(D\!\!\!/_{2n+2})=\frac{i^{n+1}}{(2\pi)^{n+1}(n+1)!}\int\mathrm{tr}(\mathcal{F}^{n+1}) \tag{79}$$

が，$2n$ 次元非可換アノマリー $\partial\Gamma[A^\theta]/\partial\theta$ の $i\int_0^{2\pi}d\theta/2\pi$ 積分に等しいことを示すことができる。この等式の θ, x に関する局所化版を用いて，$\theta=0$ での関係式を求めれば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\Gamma[A]&=\left(\frac{2\pi}{i}\right)\left(\frac{i^{n+1}}{(2\pi)^{n+1}(n+1)!}\right)n(n+1)\int_0^1dt\,(1-t)\,\mathrm{str}[Cd(AF_t^{n-1})]\\&=\left(\frac{i^n}{(2\pi)^n(n+1)!}\right)\omega^1_{2n}(C,A)\end{aligned} \tag{80}$$

が導かれる。ω^1_{2n} はちょうど前節 9-1 (84) で与えたアノマリー $2n$-form であり，特に $2n=4$ 次元では $\omega^1_4=\mathrm{tr}\left[Cd\left(AdA+\frac{1}{2}A^3\right)\right]$ であるから，(80) の係数 $i^n/(2\pi)^n(n+1)!$ は，(73) の $-1/24\pi^2$ を再現している。

9-3 アノマリーと南部-Goldstone ボソン

ここまで，アノマリーの，ゲージ理論のくりこみ可能性に対する障害としての側面，代数的・位相幾何学的側面，といったかなり形式的，数学的側面を述べてきた。しかし，驚くべきことに，アノマリーの存在自体は，実際実験的に観測されているのである。その代表例は，南部-Goldstone 粒子である π^0 中間子の 2 光子崩壊過程 $\pi^0\to2\gamma$ である。アノマリーといった，場の理論の一見病理的現象が実験的に観測されるということは，大変

興味深いというばかりではなく，場の理論の正しさを強く支持しているのである。この節ではこれについて述べる。

Wess-Zumino-Witten Lagrangian 今，カイラル・フェルミオンとゲージ場を含んだある基本的 Lagrangian があって，その系の群 G の対称性が部分群 H に自発的に破れていたとする。そのとき，一般には結合状態であるその南部-Goldstone (NG) 粒子 π と，ゲージ場 A_μ のみで書かれた現象論的有効作用 $\Gamma[\pi, A]$ で，正しくもとの基本理論のアノマリーを再現するものがつくれるかという問題を考えよう。

簡単のため，まず，G が単純群ですべてが自発的に破れる場合，$H=\{1\}$，を考える。この場合の NG 粒子 π を記述する場の変数 $g(x)$ は，**6-4** の非線形表現で述べたように，群 G の元 (のユニタリー行列表現)

$$g(x)=e^{i\pi(x)/f_\pi}, \qquad \pi(x)=\sum_{a\in G}\pi^a(x)T^a \tag{1}$$

そのもので，その最も簡単な Lagrangian は，**6-4** (21) に従って

$$\mathcal{L}(\pi)=-f_\pi^2\,\mathrm{tr}(g^{-1}\partial_\mu g\cdot g^{-1}\partial^\mu g)=f_\pi^2\,\mathrm{tr}(\partial_\mu g^{-1}\cdot\partial^\mu g) \tag{2}$$

で与えられる。群 G が局所対称性の場合は，共変微分に置き換えて

$$\mathcal{L}(g, A)=f_\pi^2\,\mathrm{tr}(D_\mu g^{-1}\cdot D^\mu g), \qquad D_\mu g\equiv(\partial_\mu+A_\mu)g \tag{3}$$

とすればよいが，これとゲージ場の運動項のみの有効作用

$$\Gamma_0[g, A]=\int d^4x\left[\mathcal{L}(g, A)-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}\right] \tag{4}$$

は，ゲージ (BRS) 不変であり，もとの理論のアノマリーを反映しない。もとの理論が，G の基本表現 T^a に属するカイラル・フェルミオンのみを含むと仮定し，その右手型多重項の数を N_{R}，左手型のそれを N_{L}，その差を $N\equiv N_{\mathrm{R}}-N_{\mathrm{L}}$ とすれば，我々は，その場合のアノマリー†

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\Gamma[g, A]&=\left(-\frac{iN}{24\pi^2}\right)\int\mathrm{tr}\left[C\left(AdA+\frac{1}{2}A^3\right)\right]\\&=\left(-\frac{iN}{24\pi^2}\right)\int\omega_4^1(C, A)\end{aligned} \tag{5}$$

を再現する有効作用 $\Gamma[g, A]$ が欲しいのである。もちろん，この式 (5) は，BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}$ ではなしに無限小 G ゲージ変換 δ

$$\delta A=dv+[A, v]=Dv, \qquad \delta g=-vg \qquad (v\in\mathcal{G}) \tag{6}$$

でもよく，その場合は，ゴースト場 C を v に置き換えて

---

† (5) の $\omega_4^1(C, A)$ は，**9-1** (86) の $\omega_4^1(C_1, A)$ の $C_1=Cd\theta$ に $d\theta$ を外して C を入れたものである。

$$\delta\Gamma[g,A]=-\frac{iN}{24\pi^2}\int\omega_4^1(v,A) \qquad (7)$$

となる。

非斉次“微分”方程式 (7) の一般解は，「その特解＋斉次方程式 $\delta\Gamma=0$ の一般解」の形で得られる。斉次方程式の解はゲージ不変な関数なら何でもよいが，微分 ∂_μ の次数が最低次のもの (したがって低エネルギー領域で支配的な項) は (4) の有効作用 $\Gamma_0[g,A]$ で与えられる。(7) の特解を得るには，それを“積分”すればよい。すなわち，NG ボソン場 $g(x)\in G$ と単位元 1 とをつなぐような，1 パラメータ t を持つ一連の G の元

$$\{\tilde{g}(x,t)\}_{0\leq t\leq 1}: \quad \tilde{g}(x,0)=g(x), \quad \tilde{g}(x,1)=1 \qquad (8)$$

を考え (例えば $\tilde{g}(x,t)=e^{i(1-t)\pi(x)/f_\pi}$)，NG ボソン場 $g(x)$ を，経路 (8) に沿って t を無限小ずつずらすゲージ変換 $\tilde{g}(x,t)\to\tilde{g}(x,t+dt)$ を次々に行って，1 まで持ってゆく。$g(x)$ が $\tilde{g}(x,t)=(\tilde{g}(x,t)g^{-1}(x))g(x)$ までゲージ変換されたとき，ゲージ場も

$$A \longrightarrow A^{\tilde{g}(t)g^{-1}}\equiv\tilde{g}(t)g^{-1}Ag\tilde{g}^{-1}(t)+\tilde{g}(t)g^{-1}d(g\tilde{g}^{-1}(t)) \qquad (9)$$

に変換されていることに注意して，$(\tilde{g}(t), A^{\tilde{g}(t)g^{-1}})$ から $(\tilde{g}(t+dt), A^{\tilde{g}(t+dt)g^{-1}})$ への無限小変換 $\delta\equiv dt(\partial/\partial t)$ を考えれば，実際それはちょうど $v=-\delta\tilde{g}\cdot\tilde{g}^{-1}=\tilde{g}\delta\tilde{g}^{-1}$ を変換パラメータとするゲージ変換 (6) となる：

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{g}(t)&=(\delta\tilde{g}(t)\cdot\tilde{g}^{-1}(t))\tilde{g}(t)=-(\tilde{g}(t)\delta\tilde{g}^{-1}(t))\tilde{g}(t)=-v\tilde{g}(t),\\
\delta A^{\tilde{g}(t)g^{-1}}&=[\delta\tilde{g}(t)\cdot\tilde{g}^{-1}(t), A^{\tilde{g}(t)g^{-1}}]+d(\tilde{g}(t)\delta\tilde{g}^{-1}(t)) \qquad (10)\\
&=dv+[A^{\tilde{g}(t)g^{-1}}, v].
\end{aligned}$$

したがって，(7) の方程式より

$$\begin{aligned}
&\Gamma[\tilde{g}(t+dt), A^{\tilde{g}(t+dt)g^{-1}}]-\Gamma[\tilde{g}(t), A^{\tilde{g}(t)g^{-1}}]\\
&\qquad=-\frac{iN}{24\pi^2}\int_{M^4}\omega_4^1(\tilde{g}(t)\delta\tilde{g}^{-1}(t), A^{\tilde{g}(t)g^{-1}}) \qquad (11)
\end{aligned}$$

が従い，これを t に関して 0 から 1 まで積分して

$$\Gamma[1,A^{g^{-1}}]-\Gamma[g,A]=-\frac{iN}{24\pi^2}\int_0^1\int_{M^4}\omega_4^1(\tilde{g}(t)\delta\tilde{g}^{-1}(t), A^{\tilde{g}(t)g^{-1}}). \qquad (12)$$

ただし M^4 は 4 次元 Minkowski 空間である。ところが，$A^{g^{-1}}=g^{-1}Ag+g^{-1}dg$ はゲージ変換 (6) で不変であるから，“積分定数”に相当する左辺第 1 項 $\Gamma[1,A^{g-1}]$ は斉次方程式 $\delta\Gamma=0$ の解であることがわかり，それゆえ，我々は，(7) の特解として

$$\Gamma_{\mathrm{WZW}}[g,A_\mu]=\frac{+iN}{24\pi^2}\int_{M^4\times I}\omega_4^1(\tilde{g}(t)\delta\tilde{g}^{-1}(t), A^{\tilde{g}(t)g^{-1}}) \qquad (13)$$

を得る。I は t の区間 $[0,1]$ を表す。この特解 Γ_{WZW} は“積分されたアノマリー”(integrated anomaly) または Wess-Zumino-Witten (ウィッテン) 項と呼ばれる。

ここで, **9-1** (75) で述べた事実, すなわちアノマリー $\omega_4^1(C_1, A)$ が Chern-Simons 5-form $\omega_5(A+C_1, F)$ の C_1 1次項であったことを思い起こせば,

$$\int_{M^4\times I}\omega_4^1(\tilde{g}(t)\delta\tilde{g}^{-1}(t), A^{\tilde{g}(t)g^{-1}})$$
$$=\int_{M^4\times I}\omega_5(A^{\tilde{g}(t)g^{-1}}+\tilde{g}(t)\delta\tilde{g}^{-1}(t), F^{\tilde{g}(t)g^{-1}}) \tag{14}$$

と書ける。なぜなら, I 上の積分には $\delta=dt(\partial/\partial t)$ の1次項しか寄与しないからである。さらに, $g(t)\equiv(\tilde{g}(t)g^{-1})^{-1}=g\tilde{g}^{-1}(t)$ を定義すれば

$$A^{\tilde{g}(t)g^{-1}}+\tilde{g}(t)\delta\tilde{g}^{-1}(t)$$
$$=g^{-1}(x,t)A(x)g(x,t)+g^{-1}(x,t)(d+\delta)g(x,t)=\mathcal{A}(x,t) \tag{15}$$

となり, これは, 4次元ゲージ場 $A(x)$ をゲージ変換 $g^{-1}(x,t)$ で5次元に拡張したもので, ちょうど **9-1** (52), (53) で導入した5次元目がボーズ座標 t の“超場” $\mathcal{A}(x,t)$ になっている。$F^{\tilde{g}(t)g^{-1}}=g^{-1}(x,t)F(x)g(x,t)$ も対応する場の強さ $\mathcal{F}(x,t)$ である。それゆえ, (13) の Wess-Zumino-Witten 項は5次元的に

$$\Gamma_{\mathrm{WZW}}[g,A]=\frac{iN}{24\pi^2}\int_{M^4\times I}\omega_5(\mathcal{A},\mathcal{F}) \tag{16}$$

と書ける。$g(x,t)=g(x)\tilde{g}^{-1}(x,t)$ は, (8) の $\tilde{g}(x,t)$ と同様 $g(x)$ と1とをつなぐ G の元の経路 (path) であるが, (8) とは逆に $g(x,0)=1$, $g(x,1)=g(x)$ となるものであることに注意しておこう。

(16) をもっと4次元的な表式に書き直そう。そのため, 一般の $2n+1$ 次元の Chern-Simons form $\omega_{2n+1}(A,F)$ に対して, ゲージ変換則

$$\begin{gathered}\omega_{2n+1}(A^{g^{-1}},F^{g^{-1}})=\omega_{2n+1}(A,F)+d\alpha_{2n}+\omega_{2n+1}(g^{-1}dg,0)\\ (A^{g^{-1}}=g^{-1}Ag+g^{-1}dg,\quad F^{g^{-1}}=g^{-1}Fg)\end{gathered} \tag{17}$$

が成立することをまず示す。この証明は,

$$\Omega_g(A,F)\equiv\omega_{2n+1}(A^{g^{-1}},F^{g^{-1}})-\omega_{2n+1}(A,F) \tag{18}$$

なる A, F の多項式 Ω_g に対し, $A_0=0$ と $A_1=A$ とをつなぐ $A_t\equiv tA$ を用いて, Cartan のホモトピー公式 **9-1** (61) を適用すればよい:

$$\Omega_g(A,F)-\Omega_g(0,0)=(k_{10}d+d\,k_{10})\Omega_g(A,F). \tag{19}$$

9-1 (68) $d\omega_{2n+1}=\mathrm{tr}\,F^{n+1}$ より $d\Omega_g=\mathrm{tr}(F^{g^{-1}})^{n+1}-\mathrm{tr}\,F^{n+1}=0$ であるから, (19) 右辺は $d\,k_{10}\Omega_g\equiv d\alpha_{2n}$ の形を持っており, さらに $\Omega_g(0,0)=$

$\omega_{2n+1}(g^{-1}dg, 0)$ に注意すれば，(19) が (17) を証明していることがわかる。$\alpha_{2n}=k_{10}\Omega_g(A,F)$ の具体的な形は，ω_{2n+1} が tr の形で与えられていることから従う等式

$$\begin{aligned}\omega_{2n+1}(A^{g^{-1}}, F^{g^{-1}}) &= \omega_{2n+1}(g^{-1}Ag+g^{-1}dg, g^{-1}Fg)\\ &= \omega_{2n+1}(A+V, F),\end{aligned} \tag{20}$$
$$V\equiv dg\cdot g^{-1}, \qquad dV=V^2,$$

および，k_{10} 演算に対する **9-1** (57), (58), (60) の規則を用いれば容易に求められる。例えば，$n=1,2$ に対して

$$\begin{aligned}&\alpha_2(V,A)=-\mathrm{tr}(VA),\\ &\alpha_4(V,A)=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[V(AdA+dAA+A^3)-\frac{1}{2}VAVA-V^3A\right].\end{aligned} \tag{21}$$

(17) の公式を用いれば，(15) により $\mathcal{A}, \mathcal{F}$ が 4 次元的 A, F の 5 次元的ゲージ変換 $A^{g^{-1}(x,t)}, F^{g^{-1}(x,t)}$ とみなせることから

$$\omega_5(\mathcal{A},\mathcal{F})=\omega_5(A,F)+(d+\delta)\alpha_4+\omega_5(g^{-1}(d+\delta)g, 0) \tag{22}$$

が得られる。右辺第 1 項は 4 次元関数の 5-form だから 0 になり，第 2 項の 5 次元積分 $\int_{M^4\times I}(d+\delta)\alpha_4$ は Stokes の定理で表面積分に直せて，結局

$$\Gamma_{\mathrm{WZW}}[g,A]=\frac{iN}{24\pi^2}\left\{\int_{M^4}\alpha_4(V=dg\cdot g^{-1}, A)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{10}\int_{M^4\times I}\mathrm{tr}[g^{-1}(x,t)(d+\delta)g(x,t)]^5\right\} \tag{23}$$

を得る。右辺第 1 項は今や我々の 4 次元空間の場 $g(x, t=1)=g(x)$ とゲージ場 $A(x)$ のみの 4 次元積分である。Witten 項と呼ばれる第 2 項は，まだ 5 次元積分で，G 中の経路 $g(x,t)$ のとり方に依存するように見える。しかし，$(d+\delta)[\mathrm{tr}(g^{-1}(d+\delta)g)^5]=0$ を満たすから，Poincaré の補題により (少なくとも G 空間で局所的には) $\mathrm{tr}(g^{-1}(d+\delta)g)^5=(d+\delta)\chi_4$ となる 4-form χ_4 が存在し，この項も表面積分 $\int_{M^4}\chi_4$ と書け，したがって，この項も境界 $t=1$ での関数 $g(x,t=1)=g(x)$ のみに依存し，経路 $g(x,t)$ を連続的に変形しても値を変えない†。

---

† Minkowski 空間 M^4 の代わりに，コンパクトな 4 次元球面 S^4 を考えた場合，Witten 項は $\Gamma_{\mathrm{W}}=(N/240\pi^2)\int_{S^4\times I}\mathrm{tr}(g^{-1}(d+\delta)g)^5$ となるが，この値は，境界値 $g(x,t=1)=g(x)$ を固定する限り，$g(x,t)$ の連続変形のみならず，$g(x,t)$ を G 中でどのようにとろうと高々 $2\pi i$ の整数倍の違いしかないこと，すなわち $e^{\Gamma_{\mathrm{W}}}$ は一意的であることがいえる。逆にこの要請をすれば，アノマリーの係数 $(1/24\pi^2)\times$ 整数が決まるのである。

次に，G が $SU(n)_R \times SU(n)_L$ のようなカイラル群 $G_R \times G_L$ で，それが $SU(n)_V$ のような対角部分群 $H=G_V$ に自発的に破れる場合を考えよう。すなわち，G_R も G_L も $H=G_V$ も数学的には同じ群(これをまた G と呼ぶ)の場合である。この場合，$G_R \times G_L/G_V \simeq G$ であり，NG ボソン場の変数 $U(x)=e^{2i\pi(x)/f_\pi}$ も G の元である。**6-4** (34) ではこれを $U(x)=\xi^2(\pi)$ と記したが，ここでは $U(x)=g^2(x)$，$g(x)=e^{i\pi(x)/f_\pi}$ と書こう。$U(x)$ のゲージ不変な Lagrangian は，先の (3) で $g \to U$，$f_\pi \to 2f_\pi$ としたもので与えられる (**6-4** (37) 参照)。今度求めるべきは，無限小カイラル・ゲージ変換

$$\begin{aligned} &\delta A_{R\mu}=dv_R+[A_{R\mu}, v_R], \qquad \delta A_{L\mu}=dv_L+[A_{L\mu}, v_L] \\ &\delta U=-v_R U+Uv_L, \qquad (v_R \in \mathcal{G}_R,\ v_L \in \mathcal{G}_L) \end{aligned} \tag{24}$$

の下で，前の (7) の代わりに次式を満たす有効作用 $\Gamma[U, A_R, A_L]$ である：

$$\delta\Gamma[U, A_R, A_L]=\frac{-iN}{24\pi^2}\int[\omega_4^1(v_R, A_R)-\omega_4^1(v_L, A_L)]. \tag{25}$$

ただし，この場合，基本的 Lagrangian には，G_R の基本表現の右手型カイラル・フェルミオン ψ_R と G_L の基本表現の ψ_L の組 (ψ_R, ψ_L) が N 組あるとした。強い相互作用に関する現実的な系では，基本的 Lagrangian は $SU(3)_{カラー}$-QCD のそれであり，その場合 $G_R \times G_L$ は n_f 個のクォーク・フレーバーのカイラル対称性 $SU(n_f)_R \times SU(n_f)_L$ であり，N は，クォークのカラーの自由度 $N=3$ で与えられる。

今度の場合，前と異なり，NG ボソン変数 $U(x) \in G$ は，ゲージ群 $G_R \times G_L \simeq G \times G$ の元の半分しかない。そこで，$v_L=-v_R$ なる関係を満たす“純”カイラル変換を次々に行っていって，$U(x)=g^2(x)$ を 1 まで持っていくことにする。そうすれば，前の (8)～(12) と同様にして次式を得る†：

$$\begin{aligned} &\Gamma[1, A_R^{g^{-1}}, A_L^g]-\Gamma[U, A_R, A_L] \\ &\quad=-\frac{iN}{24\pi^2}\int_{M^4}[\omega_4^1(\tilde{g}(t)\delta\tilde{g}^{-1}(t), A_R^{\tilde{g}(t)g^{-1}}) \\ &\qquad\qquad -\omega_4^1(\tilde{g}^{-1}(t)\delta\tilde{g}(t), A_L^{\tilde{g}^{-1}(t)g})]. \end{aligned} \tag{26}$$

今度の場合“積分定数項” $\Gamma[1, A_R^{g^{-1}}, A_L^g]$ は，残念ながら，カイラル・ゲージ不変でないので落とすわけにゆかない。実際，カイラル・ゲージ変換 (24) の有限変換で，$U'=h_R U h_L^{-1}$ ($h_R \in G_R$, $h_L \in G_L$) であるから，$U \equiv g^2$ の g は $g'=h_R g h_V^{-1}=h_V g h_L^{-1}$ [$h_V=h_V(h_R, h_L, g)$ は $h_R g h_V^{-1}=h_V g h_L^{-1}$ の関係より決

† $U=g^2$，$U(t)=\tilde{g}^2(t)=\tilde{g}(t)g^{-1}\cdot g^2\cdot g^{-1}\tilde{g}(t)=h_R(t)Uh_L(t)$ より，$h_R(t)=\tilde{g}(t)g^{-1}$，$h_L(t)=\tilde{g}^{-1}(t)g$ に注意せよ。

まる h_R, h_L, g の関数] なる変換を受け，したがって，$A_R^{g^{-1}}, A_L^g$ はカイラル・ゲージ変換の下で

$$
\begin{aligned}
(A_R^{g^{-1}})' &= (A_R^{h_R})^{h_V g^{-1} h_R^{-1}} = (A_R^{g^{-1}})^{h_V} \\
(A_L^{g})' &= (A_L^{h_L})^{h_V g h_L^{-1}} = (A_L^{g})^{h_V}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

のように右・左共通の “ベクトル的” ゲージ変換 $h_V(h_R, h_L, g)$ を受ける。それゆえ，$\Gamma[1, A_R^{g^{-1}}, A_L^g]$ の関数形を決めるには，$\Gamma[1, A_R, A_L]$ の “ベクトル的” ゲージ変換の無限小形 $v_R = v_L = v$ の下での変換性のみ調べればよい。この変換の下で，$U(x)=1$ は不変にとどまるから，$\Gamma[1, A_R, A_L]$ は (25) より

$$
\delta\Gamma[1, A_R, A_L] = -\frac{iN}{24\pi^2}\int_{M^4}[\omega_4^1(v, A_R) - \omega_4^1(v, A_L)]
\tag{28}
$$

を満たす。ところが，この式は，よく見れば **9-2** に与えた Bardeen の相殺項 (の逆符号のもの) $-\int \mathcal{Y}(A)$ の満たす式と同一である。なぜなら，**9-2** (35) (の $-iN/24\pi^2$ 倍) で，ベクトル的変換の場合に対応して $C_{1R} = C_{1L} = v$ と置いて v の一次項の $\int_{M^4}$ 積分を見れば，左辺が (28) の右辺に一致し，右辺は第一項が $C_{1R} - C_{1L} = 0$ で消え第 2 項が $-\int \mathcal{Y}(A)$ の BRS 変換 δ となるからである。それゆえ，

$$
\Gamma[1, A_R, A_L] = -\int \mathcal{Y}(A_R, A_L) + (\text{ベクトル的ゲージ変換で不変な項})
\tag{29}
$$

が成り立つ。ここで A_R, A_L に $A_R^{g^{-1}}, A_L^g$ を代入すれば，カイラル・ゲージ変換は $A_R^{g^{-1}}, A_L^g$ に対しベクトル的ゲージ変換 (27) となるから，$-\int \mathcal{Y}(A_R^{g^{-1}}, A_L^g)$ 以外の項は，カイラルゲージ不変な斉次方程式 $\delta\Gamma = 0$ の解となり，落としてよいことがわかる。したがって，(25) の特解 $\Gamma_{WZW}[U, A_R, A_L]$ は，$-\int \mathcal{Y}(A_R^{g^{-1}}, A_L^g) - [(26)\ 右辺]$ で与えられる。(26) の右辺に対してさらに，前の (14) から (23) に至る変形と同じ変形を行えば，

$$\Gamma_{\rm WZW}[U, A_{\rm R}, A_{\rm L}] = \frac{iN}{24\pi^2}\left\{\int_{M^4}\left[\alpha_4(dg\cdot g^{-1}, A_{\rm R}) - \alpha_4(dg^{-1}\cdot g, A_{\rm L}) - \left(\frac{24\pi^2}{iN}\right)q_{\!\!/}(A_{\rm R}^{g^{-1}}, A_{\rm L}^{g})\right]\right.$$
$$+\frac{1}{10}\int_{M^4\times I}{\rm tr}[(g^{-1}(x,t)(d+\delta)g(x,t))^5$$
$$\left.-(g'(x,t)(d+\delta)g'^{-1}(x,t))^5]\right\} \qquad (30)$$

が得られる。ただし，最後の tr 項で $g(x,t)\equiv g(x)\tilde{g}^{-1}(x,t)$, $g'(x,t)\equiv \tilde{g}^{-1}(x,t)g(x)$ とおいたが，どちらも $t=0$ で 1，$t=1$ で $g(x)$ となる G の元の経路であるから $g'(x,t)=g(x,t)$ に変更してもよく，そうすれば tr 項中の 2 項は等しくなる。さらに，それは $U(x,t)\equiv g^2(x,t)$ を用いて次のように書き直せる：

$$2{\rm tr}(g^{-1}\tilde{d}g)^5 = {\rm tr}(U^{-1}\tilde{d}U)^5 + 5\tilde{d}\left(g^{-1}vgv^3 + g^{-1}v^3gv + \frac{1}{2}g^{-1}vgvg^{-1}vgv\right)$$
$$\tilde{d}\equiv d+\delta, \qquad v\equiv g^{-1}(d+\delta)g. \qquad (31)$$

右辺第 2 項の全微分項 $\tilde{d}(\cdots)$ は，(30) で再び Stokes の定理で 4 次元積分 $\int_{M^4}$ に直せ，それと (30) の第 1, 2, 3 項を，(21) および **9-2** (37) を用いて計算すれば，少々面倒であるが，すべて $U=g^2$ とその微分 dU で表すことができる†：

$$\Gamma_{\rm WZW}[U, A_{\rm R}, A_{\rm L}] = \frac{iN}{240\pi^2}\int_{M^4\times I}{\rm tr}(U^{-1}(x,t)(d+\delta)U(x,t))^5$$
$$+\frac{iN}{48\pi^2}\int_{M^4}Z \qquad (32)$$

$$-Z = {\rm tr}[A_{\rm R}(dUU^{-1})^3 - {\rm p.c.}]$$
$$+{\rm tr}[(A_{\rm R}dA_{\rm R} + dA_{\rm R}A_{\rm R} + A_{\rm R}^3)(UA_{\rm L}U^{-1} - dUU^{-1}) - {\rm p.c.}]$$
$$+{\rm tr}[dA_{\rm R}dUA_{\rm L}U^{-1} - {\rm p.c.}] + \frac{1}{2}{\rm tr}[A_{\rm R}dUU^{-1}A_{\rm R}dUU^{-1} - {\rm p.c.}]$$
$$+{\rm tr}[U^{-1}A_{\rm R}UA_{\rm L}dU^{-1}dU - {\rm p.c.}] - {\rm tr}[A_{\rm R}dUU^{-1}A_{\rm R}UA_{\rm L}U^{-1} - {\rm p.c.}]$$
$$+\frac{1}{2}{\rm tr}(A_{\rm R}UA_{\rm L}U^{-1}A_{\rm R}UA_{\rm L}U^{-1}). \qquad (33)$$

ただし，p.c. は前項にパリティ共役変換 $A_{\rm R}\leftrightarrow A_{\rm L}$, $U\leftrightarrow U^{-1}$ をして得ら

---

† (30) から (33) の結果を得る際に次の全微分項を落とした：

$$(-iN/48\pi^2)\int_{M^4}d[A_{\rm R}g(Vv-vV)g^{-1} - A_{\rm L}g^{-1}(vV-Vv)g - A_{\rm R}UA_{\rm L}U^{-1}V$$
$$-A_{\rm L}U^{-1}A_{\rm R}Uv] \qquad (v\equiv g^{-1}dg,\ V\equiv dg\cdot g^{-1})$$

れる項を表し，d はすぐうしろの項のみを微分する。$U(x,t)\in G$ は，もちろん，$U(x,0)=1$ と $U(x,1)=U(x)$ をつなぐ任意の経路である。(32), (33) がカイラル群の場合の Wess-Zumino-Witten 項の最終表式である。

アノマリーの実験的検証 上で得られた結果を，基本的 Lagrangian がフレーバー n_f 種のクォークを記述する QCD で与えられる現実の系に適用することを考えよう。最初の 2 種のクォーク u, d は質量が特に小さく，3 番目の s クォークも比較的軽いので，これら 3 種のクォークを近似的に零質量とみなせば，QCD は $SU(3)_{\mathrm{R}}\times SU(3)_{\mathrm{L}}$ カイラル (フレーバー) 対称性を持つことになる。π 中間子を初めとする擬スカラー・ボソン 8 重項 $(\pi^0, \pi^{\pm}, K^0, \bar{K}^0, K^{\pm}, \eta)$ が，この近似的カイラル不変性の自発的破れに伴う NG ボソンであるとする描像がよく成り立っている。それゆえ，これら擬スカラー・ボソンの，低エネルギー領域での有効作用 Γ は，上で与えた Wess-Zumino-Witten 項 (32) プラス通常の共変な非線形 Lagrangianの形に決まる：

$$\Gamma=\int d^4x\,\frac{f_\pi{}^2}{4}\,\mathrm{tr}\,[D^\mu U^{-1}D_\mu U]+\Gamma_{\mathrm{WZW}}[U, A_{\mathrm{R}}, A_{\mathrm{L}}] \tag{34}$$

$$D_\mu U=\partial_\mu U+A_{\mathrm{R}\mu}U-UA_{\mathrm{L}\mu},$$

$$U=e^{2i\pi/f_\pi};$$

$$\pi=\sum_{a=1}^{8}\pi^a\frac{\lambda^a}{2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\begin{array}{c} \\ u \\ d \\ s\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\quad\bar{u}\quad & \quad\bar{d}\quad & \quad\bar{s}\quad\end{array}\\ \begin{pmatrix}\dfrac{\pi^0}{\sqrt{2}}+\dfrac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+\\ \pi^- & -\dfrac{\pi^0}{\sqrt{2}}+\dfrac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0\\ K^- & \bar{K}^0 & -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\eta\end{pmatrix}\end{array}. \tag{35}$$

ただし $\pi^0=\pi^3$，$\pi^{\pm}=(\pi^1\mp i\pi^2)/\sqrt{2}$ などを用いた。この場合，$A_{\mathrm{R}}, A_{\mathrm{L}}$ は，$SU(3)_{\mathrm{R}}\times SU(3)_{\mathrm{L}}$ のカイラル・フレーバー・ゲージ場であるが，現実の系においては，全成分が存在しているわけでなく，そのごく一部である電磁場 A_μ^{em}, 弱ボソン場 $W_\mu, W_\mu^\dagger, Z_\mu$ のみが存在する。6-7 の Weinberg-Salam 模型を思い起こせば，それらは次の形で $A_{\mathrm{R}}, A_{\mathrm{L}}$ に埋め込まれていることがわかる：

$$A_{\rm L}=-ieQ(A_\mu^{\rm em}-\tan\theta_{\rm W}Z_\mu)dx^\mu-i\frac{g}{\cos\theta_{\rm W}}T_ZZ_\mu dx^\mu$$
$$-i\frac{g}{\sqrt{2}}(T_{\rm W}W_\mu+T_{\rm W}^\dagger W_\mu^\dagger)dx^\mu,$$
$$A_{\rm R}=-ieQ(A_\mu^{\rm em}-\tan\theta_{\rm W}Z_\mu)dx^\mu,\qquad (g=e/\sin\theta_{\rm W})$$
$$\begin{matrix} & u & d & s \end{matrix}\qquad\qquad (36)$$
$$Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & & 0\\ & -1 & \\ 0 & & -1\end{pmatrix},$$
$$T_Z=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & -1 & \\ 0 & & -1\end{pmatrix},\quad T_{\rm W}=\begin{pmatrix}0 & \cos\theta_{\rm C} & \sin\theta_{\rm C}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$\theta_{\rm W}$, $\theta_{\rm C}$ は，それぞれ Weinberg 角，Cabibbo 角である。

(34) の有効作用には，$\Gamma_{\rm WZW}$ 項にゲージ不変な項や (アノマリーの形のとり方の任意性に対応した) ゲージ場のみの相殺項，を付け加える自由度が残っているが，それらをどうとっても変わらない部分が低エネルギー定理を与える。アノマリーの関係した過程としては，$\pi^0\to 2\gamma$ (γ：光子) や $\gamma\to 3\pi$ を代表とする諸過程に対して低エネルギー定理が成立することが知られている。この定理の与える結果自体は，(34) の有効作用から直ちに読み取ることができる†。

$\pi^0\to 2\gamma$ や $\gamma\to 3\pi$ に寄与する項を $\Gamma_{\rm WZW}$ 中の (33) から拾い出せば，$dU=2i\,d\pi/f_\pi+\cdots$，$V=(A_{\rm R}+A_{\rm L})/2$ に注意して

$$\Gamma_{\rm WZW}=\frac{iN}{48\pi^2}\int_{M^4}\left\{-3\left(\frac{2i}{f_\pi}\right){\rm tr}[(VdV+dVV)d\pi]\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{2i}{f_\pi}\right)^3{\rm tr}[V(d\pi)^3]+\cdots\right\}\qquad (37)$$

となる。特に，$V=-ieQA_\mu^{\rm em}dx^\mu+\cdots$ の電磁場部分，π (35) の π 中間子部分を取り出せば，(37) 第1項から $\pi^0\to 2\gamma$ の相互作用 Lagrangian

$$\mathcal{L}_{\pi^0\to 2\gamma}=-\frac{Ne^2}{8\pi^2 f_\pi}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_\nu^{\rm em}\partial_\rho A_\sigma^{\rm em}\pi^0,\qquad (38)$$

---

† アノマリーが存在しないとき，カイラル対称性の極限で $\pi^0\to 2\gamma$ の結合が 0 になることが Sutherland (サザーランド) により証明されていたが，Adler, Bell, Jackiw, Bardeen らは，初めて，アノマリーによる軸性カレント非保存の効果をとり入れ，カレント代数の技法を用いて $\pi^0\to 2\gamma$ の崩壊幅が正しく予言されることを示した。非線形有効作用にアノマリーの効果をとり入れるここでの技法は，Wess-Zumino により初めて与えられたものである。

第2項から $\gamma \to 3\pi$ のそれ

$$\mathcal{L}_{\gamma\to3\pi}=\frac{-iNe}{24\pi^2 f_\pi^3}\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right]i\epsilon_{abc}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\mu^{\mathrm{em}}\,\partial_\nu\pi^a\,\partial_\rho\pi^b\,\partial_\sigma\pi^c \tag{39}$$

が得られる。

QCD の場合 N はカラーの数3であることに注意して，(38) の $\mathcal{L}_{\pi^0\to2\gamma}$ より **4-6** (42) の公式を用いて $\pi^0 \to 2\gamma$ の崩壊幅を計算すれば，容易に

$$\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma)=\frac{\alpha^2}{64\pi^3}\frac{m_{\pi^0}^3}{f_\pi^{\,2}} \simeq 7.6\,\mathrm{eV} \qquad \left(\alpha\equiv\frac{e^2}{4\pi}\right) \tag{40}$$

を得る。ただし，この数値は，微細構造定数 $\alpha\simeq1/137$，π^0 の質量 $m_{\pi^0}\simeq135$ MeV，π 中間子の崩壊定数 $f_\pi\simeq93$ MeV を用いて計算した。この値は，

$$\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma)=7.48\pm0.32\,\mathrm{eV} \qquad (\text{実験値}) \tag{41}$$

で与えられる実験値と驚く程よく一致している。(40) の結果は，カイラル対称性が厳密に成立する場合の低エネルギー定理の与える結合定数 (38) が，対称性があらわに破れて π^0 が $\simeq135$ MeV の質量を持つようになった場合にもそのままにとどまると仮定して得たものであるが，π 中間子の場合，カイラル対称性の破れが小さく，この種の仮定がよい近似で成立することが他の (アノマリーに関係しない) 低エネルギー定理の過程でも確かめられている。それゆえ，(40) と (41) の見事な一致は，場の理論におけるアノマリーという現象に対する直接的実験的検証を与えるものである。また，歴史的にはこの一致が，クォークが $N=3$ のカラー自由度を持つことに対する初めての確たる証拠になったことにも注意しておこう。

π^0 の代わりに，$SU(3)$ 擬スカラー8重項の8番目の成分 η 粒子の場合なら，(35) より $\pi=\frac{\eta}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -2\end{pmatrix}+\cdots$ に注意して (37) の第1項から

$$\mathcal{L}_{\eta\to2\gamma}=-\frac{Ne^2}{8\pi^2 f_\pi}\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2-2\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right] \times\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\partial_\mu A_\nu^{\mathrm{em}}\,\partial_\rho A_\sigma^{\mathrm{em}}\,\eta \tag{42}$$

を得る。すなわち係数は $\pi^0 \to 2\gamma$ の場合 (38) に比べて $1/\sqrt{3}$ 倍となる。そこで，(40) を考慮すれば，$\eta \to 2\gamma$ の崩壊幅が，$m_\eta\simeq549$ MeV を用いて

$$\Gamma(\eta \to 2\gamma)=\frac{1}{3}\left(\frac{m_\eta}{m_{\pi^0}}\right)^3\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma) \simeq 170\,\mathrm{eV} \tag{43}$$

と予言されることがわかる。これに対して，Primakoff (プリマコフ) 効果と呼ばれる，原子核の Coulomb 場内での，γ による η 生成反応や，$e^+e^- \to$

$e^+e^-\eta$ 過程の実験で得られた幅 $\Gamma(\eta\to 2\gamma)$ は，

$$\Gamma(\eta\to 2\gamma)=\begin{cases}324\pm46\ \mathrm{eV} & (\text{実験値：Primakoff 効果})^{\dagger}\\ 520\pm30\ \mathrm{eV} & (\text{実験値：}e^+e^-\to e^+e^-\eta)^{\dagger\dagger}\end{cases}\tag{44}$$

となっており，2～3倍ほど予言値より大きい。この不一致の原因は，η の質量 $m_\eta\simeq549$ MeV$\neq0$(カイラル対称性のあらわな破れ)が大きく，有効作用のより高階微分を含む相互作用項の寄与が無視できないことや，η が $SU(3)$ 1重項擬スカラー粒子 η' と混合(mixing)を起こしている効果，などが考えられる。特に後者の η' との混合の効果は大きく，通常 $-11°$ 程度といわれるこの混合角を $-19°$ くらいにとれば，(44)の大きい方の実験値にも合わせられるという報告がある†††。

次に(39)で与えた $\gamma\to3\pi$ であるが，これは，もちろん，零質量光子の"崩壊"で見るわけにはいかないので，例えば，低エネルギー極限での $e^+e^-\to\pi^+\pi^-\pi^0$ の実験で見るのが一番直接的である。しかし，残念ながらこの実験値は存在しないようなので，γ や π を $SU(3)$ パートナーに入れ替えた過程を考えることにする。まず，$\gamma\to3\pi$ の π の一つを η に置き換えれば，$\eta\to\pi^+\pi^-\gamma$ の崩壊を引き起こす相互作用項 $\mathcal{L}_{\eta\to\pi\pi\gamma}$ となる。これは(37)と(35)より

$$\mathcal{L}_{\eta\to\pi\pi\gamma}=\frac{-iNe}{24\pi^2f_\pi^3}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^3\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right]\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\mu^{\mathrm{em}}\partial_\nu\pi^+\partial_\rho\pi^-\partial_\sigma\eta\tag{45}$$

と求まる。この過程は3体崩壊であり，**4-6** の(41)の公式を用いれば，その(部分)崩壊幅 $\Gamma(\eta\to\pi^+\pi^-\gamma)$ は，(45)および $N=3$ を使って

$$\Gamma(\eta\to\pi^+\pi^-\gamma)=\frac{1}{64\pi^3m_\eta}\int dE_+dE_-|\mathfrak{M}|^2\tag{46}$$

$$|\mathfrak{M}|^2=\left(\frac{e}{4\sqrt{3}\,\pi^2f_\pi^3}\right)^2\sum_{h=\pm1}\left|\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_\mu^{(h)}(q)k_\nu^+k_\rho^-p_\sigma\right|^2F(k^2)\qquad(k\equiv k^++k^-)\tag{47}$$

で計算される。ただし，η,π^+,π^-,γ の運動量をそれぞれ p,k^+,k^-,q と呼び，E_+,E_- は η の静止系 $p=(m_\eta,\mathbf{0})$ での π^+,π^- のエネルギーである††††。(47)では，終状態の $\pi^+\pi^-$ の間で起こる強い相互作用の効果を考慮する

---

† A. Browman *et. al.*, Phys. Rev. Lett. **32** (1974) 1067.

†† A. W. Nilsson, XXIV Int. Conf. on High Energy Physics, München (1988) での報告.

††† 巻末文献(9.24)参照

†††† (46)は3体崩壊の場合に **4-6** (41)を適用して得られる一般的公式である。

$(F(k^2=0)=1$ を満たす) 因子 $F(k^2)$ を加えておいた。この終状態相互作用因子 F として，具体的には $\pi^+\pi^-$ が ρ メソン pole を経由することを考慮して

$$F(k^2)=\left|\frac{m_\rho^2-im_\rho\Gamma_\rho(k^2)}{m_\rho^2-im_\rho\Gamma_\rho(k^2)-k^2}\right|^2,$$

$$\Gamma_\rho(k^2)=\left(\frac{k^2-4m_\pi^2}{m_\rho^2-4m_\pi^2}\right)^{\frac{3}{2}}\theta(k^2-4m_\pi^2)\Gamma_\rho \tag{48}$$

の形を用いる。m_ρ は ρ の質量 $\simeq 770$ MeV，Γ_ρ は ρ の幅 $\simeq 153$ MeV である。(47),(48) を代入して，(46) の積分を数値的に実行すれば，

$$\Gamma(\eta\to\pi^+\pi^-\gamma)\simeq 36\,\text{eV} \qquad (\text{実験値：}52\pm 8\,\text{eV}) \tag{49}$$

が得られ，実験値との一致は悪くない†。

最後に，γ を弱ボソン W に，π を K 中間子に置き換えたものを考えると，いわゆる K_{l4} 崩壊 $K^+\to e^+\nu\pi^+\pi^-$ の過程に対応する。(37) 第 2 項の $V=(A_{\mathrm{R}}+A_{\mathrm{L}})/2$ に (36) の W ボソン場，π の一つに (35) の K^+ を代入すれば，

$$\mathcal{L}_{K\to W\pi\pi}=\frac{-igN}{24\pi^2 f_\pi^3}\sin\theta_{\mathrm{C}}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(W_\mu^\dagger\partial_\nu K^+ + W_\mu\partial_\nu K^-)\partial_\rho\pi^+\partial_\sigma\pi^- \tag{50}$$

を得る。これを $\mathcal{L}_{K\to W\pi\pi}=(g/2\sqrt{2})\sin\theta_{\mathrm{C}}(W^{\mu\dagger}J_\mu^{4+i5}+W^\mu J_\mu^{4-i5})$ と書けば，$K^+\to e^+\nu\pi^+\pi^-$ 崩壊の振幅は，4-Fermi 型に (**6-7** (34) 参照)

$$\mathfrak{M}=-\frac{G}{\sqrt{2}}\sin\theta_{\mathrm{C}}\langle\pi^+\pi^-|J_\mu^{4+i5}|K^+\rangle\,\bar{u}_\nu\gamma^\mu(1-\gamma_5)v_e \tag{51}$$

と表すことができ，対応する実験は，ハドロン側の行列要素

$$\langle\pi^+\pi^-|J_\mu^{4+i5}|K^+\rangle\equiv\frac{2H}{m_K{}^3}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p_K^\nu k_+^\rho k_-^\sigma \tag{52}$$

を結局測っているといってもよい。低エネルギー定理 (50) は

$$H=\left(\frac{-2\sqrt{2}}{8\pi^2 f_\pi^3}\right)\left(\frac{m_K{}^3}{2}\right)\simeq -2.68 \tag{53}$$

を予言する。($m_{K^\pm}\simeq 494$ MeV を用いた。) 一方，実験データから，終状態相互作用等の効果を考慮し，零運動量 transfer に外挿して求められた H の値は，($\sin\theta_{\mathrm{C}}\simeq 0.22$ を用いて)

$$H=(-0.59\pm 0.15)/\sin\theta_{\mathrm{C}}=-2.68\pm 0.68 \qquad (\text{実験値}) \tag{54}$$

と報告されており††，理論値と極めてよい一致を示している。

---

† ここでも η が $SU(3)$ 1 重項 η' と混合している (混合角 $\simeq -11°$) ことを考慮すれば $\Gamma(\eta\to\pi^+\pi^-\gamma)\simeq 45$ eV が得られ，実験との一致はさらによくなる。

†† L. Rosselet *et. al.*, Phys. Rev. **D 15** (1977) 574.

アノマリーのその他の側面 以上アノマリーに関して多くの側面を述べてきたが，まだ触れていない，いくつか重要な性質がある。最も重要なのは，Adler-Bardeen の定理と呼ばれるもので，上で我々の求めた 1-loop レベルでの $U(1)$ 軸性カレントの非保存則

$$\partial^{\mu} j_{\mu}^{5}=\frac{1}{16\pi^{2}}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\ \mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma})+2im\bar{\psi}\gamma_{5}\psi \tag{55}$$

(質量項によるあらわな破れも入れておいた)，が実は，演算子の等式として摂動の任意の次数で厳密に正しい，というものである。特にアノマリーの係数 $1/16\pi^2$ は高次補正を受けない。この事実は，アノマリーの幾何学的意味や，ゲージ不変な高階微分正則化†が 2-loop グラフ以上ではうまく働くこと，などからも予想されることではあるが，とにかく，摂動論の枠内で，くりこまれた複合演算子 j_{μ}^{5} や $\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$ がゲージ不変な演算子として (55) が厳密に成立するように定義できる，ということが証明されるのである。

これ以外にも，i) アノマリーが，カレント演算子の交換関係にもアノマラスな項の存在を意味すること，そのアノマラスな項が降下方程式 9-1 (76) の ω_{2n-1}^{2} で与えられること，ii) アノマリーのある理論のくりこみ可能性，iii) 't Hooft のアノマリー釣合い条件 (anomaly matching condition)，iv) 重力アノマリー，など興味ある話題がたくさんあるが，ここでは触れる余裕がない。

演習問題 9.

9.1 ゲージ理論の可能な“アノマリー” Δ が

$$\Delta=\int d^{4}x\ \mathcal{a}=\int d^{4}x\ \mathrm{tr}[\partial_{\mu}C\cdot X^{\mu}]$$

の形を持ち，X^{μ} が次元 3 以下のゲージ場のみの関数で，かつ $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ を使わないでつくったベクトル量であるとする。このとき，Wess-Zumino 条件 $\tilde{S}*\Delta=\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\Delta=0$，すなわち Δ の BRS 不変性から，この“アノマリー” Δ は，必ず，$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}(Y)$ の形に書ける自明な BRS 不変量であることを証明せよ。

9.2 上の X^{μ} が $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ を含む場合の一般形は 9-1 (33) で与えられる。$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}X^{\mu}$ が 9-1 (31) の形を持つべしという要請が，本文に説明した方法に従い，9-1 (34) の係数条件および (35), (36) を導くことを確かめよ。

† $D_{\rho}F_{\mu\nu}D^{\rho}F^{\mu\nu}$ などを加えて，伝播関数の分母の次数を上げる正則化法。

9.3 二つの Grassmann 座標 $\theta, \bar{\theta}$ を導入した 4+2 次元超空間 $z^M \equiv (x^\mu, \theta, \bar{\theta})$ 上で，ゲージ場 $\mathcal{A}$，およびその場の強さ $\mathcal{F}$，を考える：

$$\mathcal{A}(z) \equiv A_M(z)\,dz^M = A_\mu(z)\,dx^\mu + A_\theta(z)\,d\theta + A_{\bar{\theta}}(z)\,d\bar{\theta},$$

$$\mathcal{F}(z) \equiv \tilde{d}\,\mathcal{A} + \mathcal{A}^2 = -\frac{1}{2}F_{NM}(z)\,dz^M\,dz^N,$$

$$\tilde{d} \equiv d + \delta + \bar{\delta}$$
$$\equiv (\partial/\partial x^\mu)\,dx^\mu + (\partial/\partial\theta)\,d\theta + (\partial/\partial\bar{\theta})\,d\bar{\theta}.$$

1) このとき，$A_\mu(z), A_\theta(z), A_{\bar{\theta}}(z)$ が，$\theta = \bar{\theta} = 0$ でそれぞれ通常の 4 次元ゲージ場 $A_\mu(x)$，ゴースト場 $C(x)$，反ゴースト場 $\bar{C}(x)$ に一致するものとし，かつ水平性条件

$$^\forall M \text{ に対し } F_{M\theta}(z) = F_{M\bar{\theta}}(z) = 0, \quad \text{すなわち} \quad \mathcal{F}(z) = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(z)\,dx^\mu\,dx^\nu$$

を課せば，$\theta, \bar{\theta}$ 方向の微分 $\partial/\partial\theta, \partial/\partial\bar{\theta}$ が，ちょうど，BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}_B$ および **5-5** (66) の反 BRS 変換 $\bar{\boldsymbol{\delta}}_B$ をそれぞれ与えることを示せ。ただし，水平性条件で決定されない成分 $(\partial/\partial\theta)A_{\bar{\theta}}(z)|_{\theta=\bar{\theta}=0}$ は NL 場 $B(x)$ の i 倍と同定するものとする。

2) 物質場 $\varphi_i(x)$ に対しても，超空間上に拡張した場 $\varphi_i(z)$ およびその共変微分 $\tilde{D}\varphi_i(z) = (\tilde{d} + \mathcal{A})\,\varphi_i(z)$ を考えたとき，$\varphi_i(z)$ の上でも $\partial/\partial\theta = \boldsymbol{\delta}_B$, $\partial/\partial\bar{\theta} = \bar{\boldsymbol{\delta}}_B$ を成立させるための“水平性条件”は何か。

9.4 $d^2 = 0$ から Bianchi 恒等式 $dF + [A, F] = 0$ を導いた上で，**9-1** (59) が A_t, F_t 上で成立することを示せ。

9.5 **9-2** (24) の積分 I_1, I_2 を評価し **9-2** (25) を示せ。また四角グラフ 9·3 図を計算し，**9-2** (28) の結果を導け。

9.6 ある群 G のゲージ場 V_μ(行列記法) とベクトル型で結合している零質量フェルミオン多重項 ψ の系 $\mathcal{L}_\psi \equiv \bar{\psi} i\gamma^\mu(\partial_\mu + V_\mu)\psi$ を考える。

1) この系での $U(1)$ 軸性カレント $j^5_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ のアノマリー **9-2** (40)

$$\partial^\mu\langle j^5_\mu(x)\rangle = \frac{1}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}[F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}], \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu + [V_\mu, V_\nu]$$

の係数 $1/16\pi^2$ を，9·1 図の ($\gamma_\mu\gamma_5, i\gamma_\nu, i\gamma_\rho$ を頂点とする) 三角グラフを次元正則化法で評価することにより正しく導け。

2) 同じ計算を Pauli-Villars 正則化法を用いて行え。すなわち，三角グラフ内のフェルミオンの質量を Λ に置き換えたグラフの寄与を引くことにより loop 積分を有限にし，後で $\Lambda \to \infty$ の極限をとる方法である。

9.7 **9-2** (72) と，そこで $\sigma\cdot ikA \to \sigma\cdot Aik$, $\sigma\cdot\partial A \to \sigma\cdot A\partial$ の置き換えをしたもの，との和の $\int d^4k/(2\pi)^4$ 積分を遂行し，**9-2** (73) の結果を導け。

9.8 **9-3** (30) が実際 **9-3** (32), (33) の表式に書き直せることを，本文で説明した手続きを実行して確めよ。

9.9 Weinberg-Salam 模型では，電磁場 A_μ および弱ボソン W_μ, Z_μ のカレントとの相互作用項は，**6-7** (29)

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}}=(g/2\sqrt{2})(W^{\dagger}_{\mu}J^{\mu}+W_{\mu}J^{\mu\dagger})+eA_{\mu}J^{\mu}_{\mathrm{em}}+(g/\cos\theta_{\mathrm{W}})Z_{\mu}J^{\mu}_{Z}$$

で与えられた。これらのカレント $J_{\mu}, J^{\mu}_{\mathrm{em}}, J^{\mu}_{Z}\equiv j^{(3)\mu}-\sin^2\theta_{\mathrm{W}}J^{\mu}_{\mathrm{em}}$ のクォーク部分の表式 **6-7** (52), (53), (54) から u, d, s クォークに関する部分をとり出し，次の行列形

$$(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})_{\mathrm{L}}\gamma_{\mu}\begin{pmatrix} & & \\ & T_{\mathrm{L}} & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}_{\mathrm{L}}+(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})_{\mathrm{R}}\gamma_{\mu}\begin{pmatrix} & & \\ & T_{\mathrm{R}} & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}_{\mathrm{R}}$$

($T_{\mathrm{R,L}}$：3×3 行列)

に書くことによって，**9-3** (36) の埋め込み公式を理解せよ。ただしフレーバー混合は Cabibb 角のみとせよ。

9.10 $\pi^0\to 2\gamma$ 相互作用 Lagrangian **9-3** (38) から，$\pi^0\to 2\gamma$ の崩壊幅の表式 **9-3** (40) を導け。

9.11 降下方程式 (76) を用いて，ω^1_{2n} のアノマリーが自明でないこと，すなわち $\int\omega^1_{2n}=\delta(*)$ の形には書けないことを証明せよ。

付　録

A. 4次元記法, Dirac スピノール

A-1　4次元記法

4次元テンソルの添字はギリシャ文字 $\mu, \nu, \rho, \cdots$ で, 空間の3次元成分の添字はラテン文字 $i, j, k, \cdots$ で表す。

4元ベクトル　$x^\mu=(x^0, x^1, x^2, x^3)=(x^0, x^i)=(t, \boldsymbol{x})$　(1)

計量　$g_{\mu\nu}$：　$g_{00}=+1$, $g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1$, 他は0.　(2)

添字の上下は $g_{\mu\nu}$ や $g^{\mu\nu}=(g^{-1})^{\mu\nu}$ で行う。

内積　$a\cdot b\equiv ab\equiv a_\mu b^\mu=g^{\mu\nu}a_\mu b_\nu=a_0b_0-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$　(3)

微分　$\partial_\mu\equiv\partial/\partial x^\mu=(\partial/\partial t, \nabla)$,　　$\partial^\mu=\partial/\partial x_\mu$　(4)

運動量　$p^\mu=(E, \boldsymbol{p})=i\partial^\mu=(i\partial/\partial t, -i\nabla)$　(5)

完全反対称テンソル　$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$：$\epsilon^{0123}=+1$ の規約　(6)

($\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}=-\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ に注意。性質については付録 B-5 を見よ。)

A-2　4次元 γ 行列

γ 行列の種々な性質は付録 B に与える。

$$\begin{aligned}&\gamma^\mu : \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}\\ &\quad \sigma^{\mu\nu}\equiv(i/2)[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\\ &\quad \gamma_5\equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=-i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3=\gamma_5^\dagger\end{aligned} \tag{7}$$

スピノール ψ の Dirac 共役は $\bar{\psi}\equiv\psi^\dagger\gamma_0$. 4×4 行列 Γ の行列要素 $\bar{\psi}_1\Gamma\psi_2$ の hermite 共役は

$$(\bar{\psi}_1\Gamma\psi_2)^\dagger=\bar{\psi}_2\bar{\Gamma}\psi_1, \qquad \bar{\Gamma}\equiv\gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0 \tag{8}$$

となる。種々な γ 行列の $\bar{\Gamma}$ は

$$
\begin{aligned}
\bar{\gamma}^{\mu} &= \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^{\mu}, \\
\bar{\sigma}^{\mu\nu} &= \gamma^0 \sigma^{\mu\nu\dagger} \gamma^0 = \sigma^{\mu\nu}, \\
\overline{i\gamma_5} &= \gamma^0 (i\gamma_5)^{\dagger} \gamma^0 = i\gamma_5, \\
\overline{\gamma_5\gamma^{\mu}} &= \gamma^0 (\gamma_5\gamma^{\mu})^{\dagger} \gamma^0 = \gamma_5\gamma^{\mu}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

荷電共役行列 C：

$$
\begin{aligned}
& C^{-1}\gamma^{\mu}C = -\gamma^{\mu T}, \\
& C^{-1}\sigma^{\mu\nu}C = -\sigma^{\mu\nu T}, \\
& C^{-1}\gamma_5 C = \gamma_5{}^{T}, \\
& C^{-1}\gamma_5\gamma^{\mu}C = (\gamma_5\gamma^{\mu})^{T}, \\
& C^{\dagger}C = 1, \\
& C^{T} = -C.
\end{aligned} \tag{10}
$$

以上は表示によらないが，以下に述べる二つの表示のどちらでも次式が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
& C = i\gamma^2\gamma^0 = C^*, \\
& C^2 = -1.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Pauli 行列 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$：

$$
\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{12}
$$

スピノール表示（またはカイラル表示）

$$
\begin{aligned}
& \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
& \sigma^{0i} = i\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}, \qquad \sigma^{ij} = \epsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

標準表示（または Dirac 表示）

$$
\gamma^{\mu}_{\text{標準}} = U\gamma^{\mu}_{\text{スピノール}}U^{\dagger}, \qquad U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
& \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
& \sigma^{0i} = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^{ij} = \epsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{15}
$$

A-3 Dirac スピノール

正・負エネルギー平面波解

$$
\begin{aligned}
& (\not{p} - m)\,u(\boldsymbol{p}, s) = 0, \qquad (\not{p} + m)\,v(\boldsymbol{p}, s) = 0, \\
& \bar{u}(\boldsymbol{p}, s)(\not{p} - m) = 0, \qquad \bar{v}(\boldsymbol{p}, s)(\not{p} + m) = 0.
\end{aligned} \tag{16}
$$

u, v 間の関係として $v(\boldsymbol{p}, s) = C\bar{u}^T(\boldsymbol{p}, s)$ の規約をとる。

規格・直交性

$$\begin{aligned}
&\bar{u}(\boldsymbol{p}, s)\, u(\boldsymbol{p}, s') = 2m\delta_{ss'}, \qquad \bar{v}(\boldsymbol{p}, s)\, v(\boldsymbol{p}, s') = -2m\delta_{ss'},\\
&\bar{u}(\boldsymbol{p}, s)\gamma^\mu u(\boldsymbol{p}, s') = \bar{v}(\boldsymbol{p}, s)\gamma^\mu v(\boldsymbol{p}, s') = 2p^\mu\delta_{ss'},\\
&u^\dagger(\boldsymbol{p}, s)\, v(-\boldsymbol{p}, s') = v^\dagger(\boldsymbol{p}, s)\, u(-\boldsymbol{p}, s') = 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

完全性

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=\pm} u(\boldsymbol{p}, s)\, \bar{u}(\boldsymbol{p}, s) = \not{p} + m,\\
&\sum_{s=\pm} v(\boldsymbol{p}, s)\, \bar{v}(\boldsymbol{p}, s) = \not{p} - m.
\end{aligned} \tag{18}$$

スピン和をとらない場合は $s = \pm 1$ の意味に依存する：

i）　ヘリシティ $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}| \equiv \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$ の固有状態のとき

$$\begin{aligned}
&u(\boldsymbol{p}, s)\, \bar{u}(\boldsymbol{p}, s) = (\not{p} + m)(1 + s\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})/2\\
&v(\boldsymbol{p}, s)\, \bar{v}(\boldsymbol{p}, s) = (\not{p} - m)(1 - s\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})/2\\
&\begin{pmatrix} (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\, u(\boldsymbol{p}, s) = s\, u(\boldsymbol{p}, s) \\ (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\, v(\boldsymbol{p}, s) = -s\, v(\boldsymbol{p}, s) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{19}$$

ii）　共変 4 元スピン（Pauli-Lubanski ベクトル）$W^\mu = -(4m)^{-1} \times \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\nu\rho}p_\sigma$ のある方向 e^μ $(e^2 = -1, e\cdot p = 0)$ 成分 $-e\cdot W = (1/2m) \times \gamma_5 \not{e} \not{p}$ の固有状態のとき

$$\begin{aligned}
&u(\boldsymbol{p}, s)\, \bar{u}(\boldsymbol{p}, s) = (\not{p} + m)(1 + s\gamma_5\not{e})/2\\
&v(\boldsymbol{p}, s)\, \bar{v}(\boldsymbol{p}, s) = (\not{p} - m)(1 + s\gamma_5\not{e})/2\\
&\begin{pmatrix} \gamma_5\not{e}\; u(\boldsymbol{p}, s) = s\, u(\boldsymbol{p}, s) \\ -\gamma_5\not{e}\; v(\boldsymbol{p}, s) = -s\, v(\boldsymbol{p}, s) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{20}$$

標準表示での解のあらわな形

$$u(\boldsymbol{p}, s) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}\,\chi^{(s)} \\ \sqrt{E-m}\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\chi^{(s)} \end{pmatrix}, \qquad v(\boldsymbol{p}, s) = \begin{pmatrix} \sqrt{E-m}\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\chi^{(s)\prime} \\ \sqrt{E+m}\,\chi^{(s)\prime} \end{pmatrix} \tag{21}$$

ただし $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$，$\chi^{(s)\prime} = -i\sigma^2\chi^{(s)*}$ である。二成分波動関数 $\chi^{(s)}$ は，$s = \pm 1$ が z 方向スピンの 2 倍 σ_3 の固有状態を意味するときは

$$\chi^{(s=+1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi^{(s=-1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

ヘリシティ $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$ の固有状態を意味するときは

$$\chi^{(s=+1)} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos\theta/2 \\ e^{i\varphi/2}\sin\theta/2 \end{pmatrix}, \qquad \chi^{(s=-1)} = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2}\sin\theta/2 \\ e^{i\varphi/2}\cos\theta/2 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

で与えられる。(θ, φ は $\boldsymbol{p}$ の天頂角，方位角を表す。)

Gordon 恒等式：　$u(\boldsymbol{p},s)=u(p)$ と記して

$$\begin{aligned}\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)&=(2m)^{-1}\bar{u}(p')[(p'+p)^\mu+i\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_\nu]u(p),\\ \bar{u}(p')\gamma^\mu\gamma_5 u(p)&=(2m)^{-1}\bar{u}(p')[(p'-p)^\mu\gamma_5+i\sigma^{\mu\nu}(p'+p)_\nu\gamma_5]u(p).\end{aligned}\tag{24}$$

B.　$n=2k$ 次元 Lorentz 群 $SO(1,n-1)$ の γ 行列

B-1　Clifford 代数（γ 行列のなす代数：2^n 次元）$\mathcal{C}$

$\mathcal{C}$ の生成元 $\gamma^\mu(\mu=0,1,2,\cdots,n-1)$：$2^k\times 2^k$ 行列　($n=2k$ 個)

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu},\qquad g^{\mu\nu}=\mathrm{diag}(+1,-1,-1,\cdots,-1)\tag{1}$$

$$\gamma^{\mu\dagger}=\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0,\qquad \gamma_\mu\equiv g_{\mu\nu}\gamma^\nu\tag{2}$$

$\mathcal{C}$ の基底の完全系 ($m=0,1,\cdots,n$)

$$\gamma^{(m)}\equiv\gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}\equiv(m!)^{-1}\gamma^{[\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_m]}\quad :{}_n\mathrm{C}_m\ \text{個}$$

$$=\begin{cases}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_m} & \text{どの}\ \mu_i\ \text{も相異なるとき}\\ 0 & \text{どれかの添字が一致するとき}\end{cases}\tag{3}$$

(添字に付いた [　] は完全反対称化を表す。例えば，$\gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]}=\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho+\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu+\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho-\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu-\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu$.)

$$\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}\gamma_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l})=(-)^{[m/2]}2^k\delta_{ml}\delta^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}\tag{4}$$

ただし指数部の $[x]$ は x 以下の最大の整数であり†，多添字 δ は

$$\delta^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}\equiv\delta^{\mu_1}_{[\nu_1}\delta^{\mu_2}_{\nu_2}\cdots\delta^{\mu_m}_{\nu_m]}\tag{5}$$

で定義され，その便利な性質は任意の m 階完全反対称テンソル $T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}$ に対して次式を満たすことである：

$$(m!)^{-1}\delta^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}T^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}=T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}.\tag{6}$$

B-2　荷電共役行列 C

$$C^{-1}\gamma^\mu C=\eta\,\gamma^{\mu T}\qquad(\eta=\pm1\,;\ \text{どちらも可能})\tag{7}$$

$$C^\dagger C=1\tag{8}$$

$$C^T=\eta^k(-)^{[k/2]}C\tag{9}$$

B-3　カイラル射影演算子 $P_\pm$

$$\Gamma_5\equiv i^{k-1}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^{n-1}\qquad(4\ \text{次元の}\ \gamma_5\ \text{に似たもの})\tag{10}$$

$$(\Gamma_5)^2=1,\qquad C^{-1}\Gamma_5 C=(-)^k\Gamma_5^T\tag{11}$$

$$P_\pm=(1\pm\Gamma_5)/2\tag{12}$$

---

†　$(-)^{[n/2]}=(-)^{n(n-1)/2}$ に注意.

B-4　Fierz（フィルツ）変換

一般に $D\times D$ 行列の完全系 $\{\lambda^A\}$ があり

$$\mathrm{tr}(\lambda^A\lambda_B)=N\delta^A_B \qquad (N：規格化因子) \tag{13}$$

を満たせば，任意の $D\times D$ 行列 $\Gamma=(\Gamma_{ij})$ は

$$\Gamma=N^{-1}\sum_A \lambda^A\,\mathrm{tr}(\lambda_A\Gamma) \tag{14}$$

と展開される。それゆえ，任意の二つの $D\times D$ 行列 Λ^1, Λ^2 に対し，$\Lambda^1_{ij}\Lambda^2_{kl}\equiv\Gamma^{(jk)}_{il}$ を D^2 個の行列 $\Gamma^{(jk)}$ の i, l 要素とみなせば，(14) より

$$\Lambda^1_{ij}\Lambda^2_{kl}=N^{-1}\sum_A \lambda^A_{il}(\Lambda^2\lambda_A\Lambda^1)_{kj} \tag{15}$$

が従い，これが Fierz 変換の公式

$$(\bar\psi_1\Lambda^1\psi_2)(\bar\psi_3\Lambda^2\psi_4)=N^{-1}\sum_A(\bar\psi_1\lambda^A\psi_4)(\bar\psi_3\Lambda^2\lambda_A\Lambda^1\psi_2) \tag{16}$$

を与える。$\psi_{1\sim4}$ は D 次元ベクトルである。

今の場合，(3) の C の基底 $\{\gamma^{(m)}\}$ は $\sum_{m=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_m=2^n=2^k\times2^k$ 個あり，$2^k\times2^k$ 行列の完全系をなし，(4) の規格化を満たすから，(16) は

$$\begin{aligned}&(\bar\psi_1\Lambda^1\psi_2)(\bar\psi_3\Lambda^2\psi_4)\\&=\frac{1}{2^k}\sum_{m=0}^{n}(-)^{[m/2]}\frac{1}{m!}(\bar\psi_1\gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}\psi_4)(\bar\psi_3\Lambda^2\gamma_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}\Lambda^1\psi_2)\end{aligned} \tag{17}$$

となる。$\psi_{1\sim4}$ は 2^k 成分の $SO(1, n-1)$ スピノールである†。もし Λ^1, Λ^2 のテンソル添字が縮約されている場合には次の公式が有用である。

$$\begin{aligned}&(m!)^{-1}\gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}\gamma^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}\gamma_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}=(-)^{[m/2]}d_{ml}\,\gamma^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}\\&d_{ml}=(-)^{ml}\{多項式\ (1+x)^{n-l}(1-x)^l\ の中の\ x^m\ の係数\}.\end{aligned} \tag{18}$$

B-5　完全反対称テンソルと双対則

$\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}$：$n$ 次元完全反対称テンソル ($\epsilon^{012\cdots n-1}=+1$)

$^\forall m\ (0\leqq m\leqq n)$ に対して††

$$\frac{(-)^{n-1}}{(n-m)!}\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m\rho_1\rho_2\cdots\rho_{n-m}}\epsilon_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m\rho_1\rho_2\cdots\rho_{n-m}}=\delta^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m} \tag{19}$$

$$\gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-m}}=\frac{(-)^{[m/2]+1}i^{k-1}}{m!}\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-m}\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}\gamma_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}\Gamma_5 \tag{20}$$

B-6　合成則，トレース公式，その他

$$\gamma_\mu\gamma^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}\quad=\gamma_\mu{}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}+\sum_i(-)^{i-1}\delta^{\alpha_i}_\mu\gamma^{\alpha_1\cdots\breve{\alpha}_i\cdots\alpha_m}, \tag{21}$$

---

† もし $\psi_{1\sim4}$ のスピノールを Grassmann 数とするなら，(17) の右辺には負号がつく。

†† (19) の符号 $(-)^{n-1}$ は $(n-1)$ 個の空間添字を下げたところからくる。

$$\gamma_{\mu\nu}\gamma^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}=\gamma_{\mu\nu}{}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}+\sum_i(-)^i\delta^{\alpha_i}_{[\mu}\gamma_{\nu]}{}^{\alpha_1\cdots\breve{\alpha}_i\cdots\alpha_m}$$
$$+\sum_{i<j}(-)^{i+j}\delta^{\alpha_i\alpha_j}_{\mu\nu}\gamma^{\alpha_1\cdots\breve{\alpha}_i\cdots\breve{\alpha}_j\cdots\alpha_m}, \tag{22}$$

$$\gamma_{\mu\nu\rho}\gamma^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}=\gamma_{\mu\nu\rho}{}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}+\sum_i(-)^{i-1}\delta^{\alpha_i}_{[\mu}\gamma_{\nu\rho]}{}^{\alpha_1\cdots\breve{\alpha}_i\cdots\alpha_m}$$
$$+\sum_{i<j}(-)^{i+j}\delta^{\alpha_i\alpha_j}_{[\mu\nu}\gamma_{\rho]}{}^{\alpha_1\cdots\breve{\alpha}_i\cdots\breve{\alpha}_j\cdots\alpha_m}$$
$$+\sum_{i<j<l}(-)^{i+j+l-1}\delta^{\alpha_i\alpha_j\alpha_l}_{\mu\nu\rho}\gamma^{\alpha_1\cdots\breve{\alpha}_i\cdots\breve{\alpha}_j\cdots\breve{\alpha}_l\cdots\alpha_m} \tag{23}$$

等々。ただし $\breve{\alpha}_i$ は添字 α_i を除く意味であり，上下の添字の混ざった γ 行列は $\gamma_\mu{}^{\alpha\beta\cdots}\equiv g_{\mu\nu}\gamma^{\nu\alpha\beta\cdots}$ などを表す。また，すでに反対称な添字の二組 $(\mu_1\cdots\mu_m)$ と $(\nu_1\cdots\nu_l)$ の間の反対称化 $A_{[\mu_1\cdots\mu_m}B_{\nu_1\cdots\nu_l]}$ は $(m+l)!/m!\,l!$ 個の項の反対称和である。(21) を 2 度使えば，特に

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho=\gamma^{\mu\nu\rho}+g^{\mu\nu}\gamma^\rho-g^{\mu\rho}\gamma^\nu+g^{\nu\rho}\gamma^\mu. \tag{24}$$

$\not{a}=a_\mu\gamma^\mu$ として

$$\mathrm{tr}(\not{a}\not{b})=a\cdot b\,\mathrm{tr}(1)=2^k a\cdot b \tag{25}$$

$$\mathrm{tr}(\not{a}_1\not{a}_2\not{a}_3\not{a}_4)=2^k[(a_1\cdot a_2)(a_3\cdot a_4)-(a_1\cdot a_3)(a_2\cdot a_4)+(a_1\cdot a_4)(a_2\cdot a_3)] \tag{26}$$

$$\mathrm{tr}(\not{a}_1\not{a}_2\cdots\not{a}_{2m})=2^k\sum_{\sigma:\text{置換}}\mathrm{sgn}\,\sigma\,(a_{\sigma(1)}\cdot a_{\sigma(2)})\cdots(a_{\sigma(2m-1)}\cdot a_{\sigma(2m)}) \tag{27}$$

$$\mathrm{tr}(\Gamma_5\not{a}_1\not{a}_2\cdots\not{a}_n)=2^k(-i)^{k-1}\epsilon_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}a_1^{\mu_1}a_2^{\mu_2}\cdots a_n^{\mu_n} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
&\gamma_\mu\gamma^\mu=n\\
&\gamma_\mu\not{a}\,\gamma^\mu=(2-n)\not{a}\\
&\gamma_\mu\not{a}\not{b}\,\gamma^\mu=4a\cdot b+(n-4)\not{a}\not{b}\\
&\gamma_\mu\not{a}\not{b}\not{c}\,\gamma^\mu=-2\not{c}\not{b}\not{a}-(n-4)\not{a}\not{b}\not{c}\\
&\gamma_\mu\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\,\gamma^\mu=2(\not{d}\not{a}\not{b}\not{c}+\not{c}\not{b}\not{a}\not{d})+(n-4)\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}
\end{aligned} \tag{29}$$

(その他の縮約公式として一般式 (18) がある。)

$$\begin{aligned}
&\not{a}\not{a}=a^2\\
&\not{a}\not{b}=a\cdot b+a_\mu b_\nu\gamma^{\mu\nu} &&[(21)\text{ より}]\\
&\not{a}\gamma_\mu\not{a}=-a^2\gamma_\mu+2a_\mu\not{a} &&[(24)\text{ より}]
\end{aligned} \tag{30}$$

C. Feynman グラフの積分公式

C-1 Feynman のパラメータ公式

$$\frac{1}{ab}=\int_0^1 dx\,\frac{1}{[ax+b(1-x)]^2} \tag{1}$$

$$\frac{1}{abc}=\int_0^1 2ydy\int_0^1 dx\,\frac{1}{[ayx+by(1-x)+c(1-y)]^3} \tag{2}$$

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta}=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 dx\,\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{[ax+b(1-x)]^{\alpha+\beta}} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}&=\int_0^1 dx_1\cdots\int_0^1 dx_{n-1}\\&\times\frac{(n-1)!\,x_2x_3{}^2\cdots x_{n-1}^{n-2}}{[(a_1-a_2)x_1\cdots x_{n-1}+(a_2-a_3)x_2\cdots x_{n-1}+\cdots+(a_{n-1}-a_n)x_{n-1}+a_n]^n}\\&=\int_0^1 dx_1\cdots\int_0^1 dx_n\,\frac{(n-1)!\,\delta(1-x_1-x_2-\cdots-x_n)}{[a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n]^n}\end{aligned} \tag{4}$$

一般式 (4) の 2 表式のうち，形式的には第 2 式が美しいが，実用上は第 1 式が計算しやすい。後者は (3) をくり返し使えば出る。(3) や (4) の第 2 式は，べき $z^{-\alpha}$ を指数関数 e^{-izt} に直す公式 **7-1** (5)

$$\frac{1}{z^\alpha}=\frac{i^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-izt}t^{\alpha-1}dt \qquad [\mathrm{Im}\,z<0,\ \mathrm{Re}\,\alpha>0] \tag{5}$$

を各因子 $a_i^{-\alpha_i}$ に適用し，そのとき現れる n 個の積分変数 $t_1, \cdots, t_n$ に対し，$t_i=x_it$ $(0\leqq t<\infty,\ 0\leqq x_i\leqq 1,\ \sum_i x_i=1)$ の変数変換をやればすぐ導ける。

C-2　次元正則化による n 次元積分公式

($n/2\equiv\eta$ と記す。$m^2-i\epsilon$ の $-i\epsilon$ は省略。)

$$\int\frac{d^nk}{i(2\pi)^n}\ln(m^2+2k\cdot p-k^2)=-\frac{\Gamma(-\eta)}{(4\pi)^\eta}(m^2+p^2)^\eta \tag{6}$$

$$\int\frac{d^nk}{i(2\pi)^n}\frac{1}{(m^2+2k\cdot p-k^2)^\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha-\eta)}{(4\pi)^\eta\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(m^2+p^2)^{\alpha-\eta}} \tag{7}$$

$$\int\frac{d^nk}{i(2\pi)^n}\frac{k^\mu}{(m^2+2k\cdot p-k^2)^\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha-\eta)}{(4\pi)^\eta\Gamma(\alpha)}\frac{p^\mu}{(m^2+p^2)^{\alpha-\eta}} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\int\frac{d^nk}{i(2\pi)^n}\frac{k^\mu k^\nu}{(m^2+2k\cdot p-k^2)^\alpha}\\&=\frac{1}{(4\pi)^\eta\Gamma(\alpha)}\left[\Gamma(\alpha-\eta)\frac{p^\mu p^\nu}{(m^2+p^2)^{\alpha-\eta}}-\Gamma(\alpha-1-\eta)\frac{(1/2)\,g^{\mu\nu}}{(m^2+p^2)^{\alpha-1-\eta}}\right]\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\int\frac{d^nk}{i(2\pi)^n}\frac{k^\mu k^\nu k^\rho}{(m^2+2k\cdot p-k^2)^\alpha}\\&=\frac{1}{(4\pi)^\eta\Gamma(\alpha)}\left[\Gamma(\alpha-\eta)\frac{p^\mu p^\nu p^\rho}{(m^2+p^2)^{\alpha-\eta}}-\Gamma(\alpha-1-\eta)\frac{(1/2)\,g^{(\mu\nu}p^{\rho)}}{(m^2+p^2)^{\alpha-1-\eta}}\right]\end{aligned} \tag{10}$$

$$\int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \frac{k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma}{(m^2+2k\cdot p-k^2)^\alpha}$$
$$= \frac{1}{(4\pi)^\eta \Gamma(\alpha)} \Big[\Gamma(\alpha-\eta) \frac{p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma}{(m^2+p^2)^{\alpha-\eta}} - \Gamma(\alpha-1-\eta) \frac{(1/2)\, g^{(\mu\nu} p^\rho p^{\sigma)}}{(m^2+p^2)^{\alpha-1-\eta}}$$
$$+ \Gamma(\alpha-2-\eta) \frac{(1/4)\, g^{(\mu\nu} g^{\rho\sigma)}}{(m^2+p^2)^{\alpha-2-\eta}} \Big] \qquad (11)$$

(10), (11) 中の添字についた ( ) は完全対称和を表す：

$$g^{(\mu\nu} p^{\rho)} = g^{\mu\nu} p^\rho + g^{\nu\rho} p^\mu + g^{\rho\mu} p^\nu$$
$$g^{(\mu\nu} p^\rho p^{\sigma)} = g^{\mu\nu} p^\rho p^\sigma + g^{\mu\rho} p^\nu p^\sigma + g^{\mu\sigma} p^\nu p^\rho + g^{\nu\rho} p^\mu p^\sigma + g^{\nu\sigma} p^\mu p^\rho + g^{\rho\sigma} p^\mu p^\nu$$
$$g^{(\mu\nu} g^{\rho\sigma)} = g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} \qquad (12)$$

C-3 Γ 関数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \qquad (\mathrm{Re}\, z > 0)$$
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \qquad (13)$$
$$\Gamma(m+1) = m! \qquad (m=0, 1, 2, \cdots)$$
$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$\varepsilon \equiv (4-n)/2 \ll 1$ のとき，(γ : Euler 定数)

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \frac{1}{2}\left(\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}\right)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$
$$\Gamma(\varepsilon-1) = -\frac{1}{\varepsilon} + (\gamma-1) - \frac{1}{2}\left(\gamma^2 - 2\gamma + \frac{\pi^2}{6}\right)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \qquad (14)$$
$$\Gamma(\varepsilon-n) = \frac{(-)^n}{n!}\left[\frac{1}{\varepsilon} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \gamma\right] + O(\varepsilon)$$

D. 行列・演算子に関する便利な公式

D-1 相似変換

行列 (または演算子) X, Y に対して

$$e^Y X e^{-Y} = X + [Y, X] + \frac{1}{2!}[Y, [Y, X]] + \cdots = [\exp \Delta_Y] X \qquad (1)$$

ただし $^\forall Z$ に対し　$\Delta_Y Z \equiv [Y, Z]$

D-2 Baker-Campbell-Hausdorff 公式

$$e^X e^Y = \exp\Big\{ X + Y + \frac{1}{2}[X, Y]$$
$$+ \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) + \cdots \Big\} \qquad (2)$$

特に，$[X,Y]$ が X とも Y とも可換な場合，次式が従う：

$$\begin{aligned} e^X e^Y &= e^{[X,Y]} e^Y e^X \\ e^{X+Y} &= e^{-\frac{1}{2}[X,Y]} e^X e^Y \\ (e^X e^Y)^n &= \exp\left\{\frac{n(n+1)}{2}[X,Y]\right\} e^{nY} e^{nX} \end{aligned} \tag{3}$$

D-3 変　分

Feynman の公式： X を $X+\delta X$ に変化させたときの e^X の変化は

$$\delta(e^X) = \int_0^1 d\alpha\, e^{(1-\alpha)X} \delta X\, e^{\alpha X} \tag{4}$$

行列式の変分

$$\delta(\det M) = \det M \cdot (M^{-1})^{ij} \delta M_{ij} \tag{5}$$

D-4 行列，行列式

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - CB^{-1}D & CB^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D & B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & A^{-1}C \\ 0 & B - DA^{-1}C \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\therefore \ \det M = \det(A - CB^{-1}D) \cdot \det B = \det A \cdot \det(B - DA^{-1}C) \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\ln\det M = \operatorname{tr}\ln M \\ &\ln(MN) = \ln M + \ln N + \frac{1}{2}[\ln M, \ln N] + \cdots \\ &\det(1+\varepsilon X) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} X + \frac{1}{2}\varepsilon^2[(\operatorname{tr} X)^2 - \operatorname{tr}(X^2)] + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \tag{8}$$

D-5 生成・消滅演算子

1 自由度系で ：　： を正規順序積として

$$:\exp(\tau a^\dagger a): = \exp[a^\dagger a \ln(1+\tau)] \tag{9}$$

特にパラメータ $\tau \to -1$ の極限で真空への射影演算子となる：

$$:\exp(-a^\dagger a): = |0\rangle\langle 0| \tag{10}$$

n 自由度系 $a_i^{(\dagger)}$ $(i=1,\cdots,n)$ で，M, N を $n\times n$ 行列として

$$\begin{aligned} &\exp\left(\frac{1}{2}aNa\right)\exp\left(\frac{1}{2}a^\dagger M a^\dagger\right)|0\rangle \\ &\quad = \det{}^{-\frac{1}{2}}(1-MN) \cdot \exp\left(\frac{1}{2}a^\dagger M \frac{1}{1-NM} a^\dagger\right)|0\rangle \end{aligned} \tag{11}$$

D-6 Wick の定理

$\phi(x)$ を自由場，$J(x)$ を外場，$J_x\phi_x \equiv \int d^n x\, J(x)\phi(x)$ としたとき，

$$\mathrm{T}\, e^{J_x\phi_x}=\exp\left(\frac{1}{2}J_y\langle 0|\mathrm{T}\,\phi_y\phi_z|0\rangle J_z\right): e^{J_x\phi_x}: \tag{12}$$

この等式は，T が時間順序積でも，反時間順序積でも，反正規順序積でも，T=1 (そのままの積) でも何でも成立する。T=1 の場合は (3) の Baker-Hausdorff 公式と同じ。

E.　外積代数と微分形式

ここでは外積代数および微分形式について基本的な事柄を証明抜きで述べる。数学的厳密さは追求しない。わかりやすさのために，常に特定の基底や座標に依拠した成分表示を併記するが，これらの数学は，そういう表示には独立な幾何学的意味を明確にするところに重要性がある。

E-1　外積代数

V を実数 $\boldsymbol{R}$ 上の n 次元ベクトル空間，$e\equiv\{\boldsymbol{e}_\mu\}=\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ をその一つの基底 (basis) とすれば，V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}\in V$ は $\boldsymbol{v}=\sum_{\mu=1}^{n} v^\mu \boldsymbol{e}_\mu$ (以下くり返し添字の和記号は省略する) と展開される。(v^μ) は $\boldsymbol{v}$ の基底 e に依拠した成分表示である。

双対空間 (dual space) V^*　V から $\boldsymbol{R}$ への線形写像 $\boldsymbol{u}: {}^\forall\boldsymbol{v}\in V \rightarrow \langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle\in\boldsymbol{R}$, 全体の成す線形空間を双対空間 V^* と呼ぶ。V の基底 $e=\{\boldsymbol{e}_n\}$ に対し，

$$\langle\boldsymbol{e}^\nu, \boldsymbol{e}_\mu\rangle=\delta^\nu_\mu \tag{1}$$

を満たす $\boldsymbol{e}^\nu\in V^*$ の組 $e^*=\{\boldsymbol{e}^\mu\}$ は，双対基底 (dual basis) と呼ばれ，${}^\forall\boldsymbol{u}\in V^*$ は $\boldsymbol{u}=u_\mu\boldsymbol{e}^\mu$ と展開される。V^* の元 $\boldsymbol{u}$ または (u_μ) を共変ベクトル，V の元 $\boldsymbol{v}$ または (v^μ) を反変ベクトルと呼ぶこともある。$\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle\in\boldsymbol{R}$ を逆に見れば，$\boldsymbol{v}\in V$ の方を V^* から $\boldsymbol{R}$ への線形写像をみなすことができる。よって $(V^*)^*=V$ である。以後，$\boldsymbol{R}$ への線形写像とみなした場合の V, V^* の基底 $\{\boldsymbol{e}_\mu\}, \{\boldsymbol{e}^\mu\}$ を $\{e_\mu\}, \{e^\mu\}$ と記す。

(r, s)-テンソル空間 V^r_s　r 個の V^* の元と s 個の V の元の組 $(\boldsymbol{u}_1, \cdots \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{v}_1, \cdots \boldsymbol{v}_s)$ に対して実数 $\boldsymbol{R}$ を対応させる (どの $\boldsymbol{u}_i$, どの $\boldsymbol{v}_j$ に対しても線形な) $(r+s)$ 重線形写像 S を (r, s)-テンソル，それ全体の成す線形空間を (r, s)-テンソル空間 V^r_s と呼ぶ。${}^\forall S$ は

$$S(\boldsymbol{e}^{\mu_1}, \cdots, \boldsymbol{e}^{\mu_r}, \boldsymbol{e}_{\nu_1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{\nu_s})\equiv S^{\mu_1\cdots\mu_r}{}_{\nu_1\cdots\nu_s} \tag{2}$$

とすれば，明らかに

$$S = S^{\mu_1\cdots\mu_r}{}_{\nu_1\cdots\nu_s}\, e_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes e_{\mu_r}\otimes e^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes e^{\nu_s} \qquad (3)$$

と書ける。ただし，テンソル積 $e_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes e^{\nu_s}$ のそれぞれの因子 e_{μ_i}, e^{ν_j} は，(1) の意味での $V\to\boldsymbol{R}$, $V^*\to\boldsymbol{R}$ の線形写像である。それゆえ V^r_s はテンソル積空間 $\otimes^r V\otimes^s V^*$ である。$(r,0)$-テンソルを r 階反変テンソル，$(0,s)$-テンソルを s 階共変テンソル，$r\neq 0, s\neq 0$ の一般の場合は混合テンソル，と呼ぶ。

k-form　k 階共変テンソル $\omega\in\otimes^k V^*$ で完全反対称なものを k-form と呼び，それ全体の成す空間を $\wedge^k V^*$ と記す。すなわち，$(1,2,\cdots,k)$ の置換 σ に対して，$\mathrm{sgn}\,\sigma$ を σ が偶置換のとき $+1$，奇置換のとき -1 と定義したとき，k-form ω は

$$\omega(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{v}_{\sigma(2)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{\sigma(k)}) = (\mathrm{sgn}\,\sigma)\,\omega(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k) \qquad (4)$$

を満たす $(0,k)$ テンソルである。特に，双対ベクトル $\boldsymbol{u}\in V^*$ は 1-form である。

外積　任意の k-form ω と任意の l-form χ とから $(k+l)$-form $\omega\wedge\chi$ をつくる演算 $\wedge$ を外積 (wedge product) と呼ぶ。その定義は，

$$\begin{aligned}&(\omega\wedge\chi)(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{k+l})\\ &\quad\equiv\frac{1}{k!\,l!}\sum_\sigma(\mathrm{sgn}\,\sigma)\,\omega(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)},\cdots,\boldsymbol{v}_{\sigma(k)})\,\chi(\boldsymbol{v}_{\sigma(k+1)},\cdots,\boldsymbol{v}_{\sigma(k+l)}).\end{aligned} \qquad (5)$$

和は $k+l$ 個の変数のあらゆる置換 σ についてとる。この外積は明らかに分配則，結合則を満たす他，次の歪対称性を持つ：

$$\omega\wedge\chi = (-1)^{kl}\chi\wedge\omega \qquad (\omega : k\text{-form},\ \chi : l\text{-form}) \qquad (6)$$

V^* の基底 (1-form) の k 重の外積の全体 $\{e^{\mu_1}\wedge e^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge e^{\mu_k}\}$ は，明らかに，k-form の空間 $\wedge^k V^*$ の基底を与え，$^\forall\omega\in\wedge^k V^*$ は次の成分表示を持つ：

$$\omega = \frac{1}{k!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_k} e^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge e^{\mu_k} \longleftarrow \omega_{\mu_1\cdots\mu_k}\equiv\omega(\boldsymbol{e}_{\mu_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{\mu_k}) \qquad (7)$$

内部積 (interior product) i_v　$\boldsymbol{v}\in V$ を与えられたとき，k-form ω から $(k-1)$-form $i_v\,\omega$ をつくる演算 i_v を内部積と呼び，次式で定義する：

$$(i_v\omega)(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{k-1})\equiv\omega(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{k-1}). \qquad (8)$$

i_v は，明らかに，反可換性 $i_v\, i_w = -i_w\, i_v$ や次の性質を持つ：

$$\begin{aligned}&i_v(\omega\wedge\chi) = (i_v\omega)\wedge\chi + (-1)^k\omega\wedge(i_v\chi)\\ &\qquad(\omega : k\text{-form},\ \chi : l\text{-form})\end{aligned} \qquad (9)$$

計量空間　2 階共変テンソル $g\in V^*\otimes V^*$ で，

i） 対称 $g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})=g(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$, (10)

ii） 非退化 $^{\forall}\boldsymbol{v}\in V$ に対し $g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})=0$ ならば $\boldsymbol{w}=0$, (11)

という性質を持つものを計量 (metric) と呼び，$g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ を内積という。$g(\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu)\equiv g_{\mu\nu}$ とすれば，$g=g_{\mu\nu}\, e^\mu\otimes e^\nu$ と成分表示される。計量 g の備わった空間 V を計量空間と呼び，以後，この場合を考える。g が存在すれば，$V\to V^*$ の自然な対応

$$\tilde{g}:\boldsymbol{v}\in V\to \tilde{g}(\boldsymbol{v})\in V^*, \quad \langle\tilde{g}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}\rangle\equiv g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \tag{12}$$

が決まる。g の非退化性から $\tilde{g}^{-1}$ が存在し，この対応は1対1である。[成分表示では，これは $g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu}$ による添字の上げ下げに対応している。] 計量空間では，常に $g(\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu)=\epsilon_\mu\delta_{\mu\nu}$，$\epsilon_\mu=\pm1$ となる正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_\mu\}$ を選べる。対角成分 ϵ_μ のうち $+1$ の個数を s，-1 の個数を t としたとき，(s, t) を g の符号定数 (signature) と呼ぶ。符号定数 $(n, 0)$ の空間は n 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ であり，Minkowski 空間は $(3,1)$ [または $(1,3)$] の空間である。

自然な体積要素 η 正規直交基底の場合の $\eta=e^1\wedge e^2\wedge\cdots\wedge e^n$ は，一般の基底の場合，

$$\eta\equiv\sqrt{(-1)^t\det g}\; e^1\wedge e^2\wedge\cdots\wedge e^n \tag{13}$$

となる。この η は，1次元しかない n-form の空間 $\wedge^n V^*$ の基底を与え，計量 g に伴われる自然な体積要素と呼ばれる。V の基底を任意に二つ $\{\boldsymbol{e}_\mu\}, \{\boldsymbol{e}'_\mu\}$ と選んだとき，それらは $\det a\neq0$ の $n\times n$ 行列 $a=(a_\mu{}^\nu)$ でつながる: $\boldsymbol{e}_\mu=a_\mu{}^\nu\boldsymbol{e}'_\nu$. 対応する体積要素 η, η' は，$\eta=(\det a/|\det a|)\eta'$ の関係となる。$\det a\neq0$ であるから，$\det a>0$ の a でつながる基底を同じ向き (orientation), $\det a<0$ の a でつながる基底を逆向きと定義する。一つ選んだ基底に対し，同じ向きの基底のみに話を限ったとき，V を向き付けられた V と呼び，その場合，体積要素 η は一意的である。

Hodge の $*$ (star) 作用素 向き付けられた計量空間 V の場合，k-form $\omega\in\wedge^k V^*$ から $(n-k)$-form $*\omega\in\wedge^{n-k}V^*$ をつくる線形作用素 $*$ が定義できる：

$$*\omega(\boldsymbol{v}_{k+1}, \cdots \boldsymbol{v}_n)\eta\equiv\omega\wedge\tilde{g}(\boldsymbol{v}_{k+1})\wedge\cdots\wedge\tilde{g}(\boldsymbol{v}_n) \qquad (^{\forall}\boldsymbol{v}_i\in V). \tag{14}$$

この定義より，一般の基底に対し，

$$*(e^{\mu_1}\wedge e^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge e^{\mu_k})$$
$$=\frac{1}{(n-k)!}\frac{1}{\sqrt{(-1)^t\det g}}\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}g_{\mu_{k+1}\nu_{k+1}}\cdots g_{\mu_n\nu_n}e^{\nu_{k+1}}\wedge\cdots\wedge e^{\nu_n} \tag{15}$$

である。$\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_n}$ は ($\epsilon^{12\cdots n}=+1$ の) n 階完全反対称テンソルである (付録B参照)。$^\forall\omega,\chi\in\wedge^k V^*$ に対し

$$(*\omega)\wedge\chi=(*\chi)\wedge\omega \tag{16}$$

$$*(*\omega)=(-1)^{k(n+1)+t}\omega \qquad (t\text{: 負計量次元の数}) \tag{17}$$

が成り立つ。

E-2 多様体上の微分形式

微分可能多様体 M (位相)空間 M が，いくつかの開集合 U_i で覆われていて，各 U_i から n 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ の開集合への (同相) 写像 ψ_i

$$\psi_i\text{: 点 } p\in M \longrightarrow \psi_i(p)=(x_i^\mu(p))=(x_i^1(p),\cdots,x_i^n(p))\in\boldsymbol{R}^n \tag{18}$$

が与えられているとき，(U_i,ψ_i) を座標近傍，n 個の関数の組 (x_i^μ) を (U_i,ψ_i) における局所座標系と呼ぶ。さらに，任意の二つの近傍 U_i と U_j の重なり $U_i\cap U_j$ において，二つの座標系 (x_i^μ) と (x_j^μ) の間の変換 $\psi_j\circ\psi_i^{-1}$: $x_j^\mu=F^\mu(x_i^1,\cdots,x_i^n)$ が微分可能な場合，M を n 次元微分可能多様体と呼ぶ。また，この座標変換の関数行列式 $\det|\partial F^\mu/\partial x_i^\nu|\ (\neq 0)$ が任意の $U_i\cap U_j$ で常に正であるように座標系が選ばれているとき，M を向き付けられた多様体という。

以後，煩わしいので，座標近傍を区別する U_i,ψ_i,x_i^μ の添字 i は省略する。

M 上の微分可能な関数 M から実数 $\boldsymbol{R}$ への写像 f は，$f\circ\psi^{-1}$: $\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ が微分可能であるとき，M 上の微分可能な関数と呼び，その全体を $C^0(M)$ と記す。

接ベクトル・接空間 M 上の点 p で，線形写像 X_p: $C^0(M)\to\boldsymbol{R}$ が

$$X_p(fg)=X_p(f)g(p)+f(p)X_p(g) \qquad (^\forall f,{}^\forall g\in C^0(M)\text{ に対し}) \tag{19}$$

を満たすとき，X_p を点 p での接ベクトル，その全体の張る空間を接空間 (tangent vector space) T_pM と呼ぶ。接ベクトルとは，要するに，点 p での微分であり，

$$(\partial/\partial x^\mu)_p f\equiv\frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p), \qquad f\in C^0(M) \tag{20}$$

で定義される n 個の接ベクトル $\{(\partial/\partial x^\mu)_p\}$ が T_pM の基底をなす。

M 上のベクトル場 M 上のベクトル場 X とは，$C^0(M)$ から $C^0(M)$ への線形写像で Leibniz 則

$$X(fg)=X(f)g+fX(g) \qquad (^\forall f,{}^\forall g\in C^0(M)\text{ に対し})$$

を満たすものをいう。X の全体を$\mathcal{V}(M)$ と記す。X は，各座標近傍で

$$X=\xi^\mu\,\partial/\partial x^\mu \tag{21}$$

と表され，各点 p において接ベクトル $X_p=\xi^\mu(p)(\partial/\partial x^\mu)_p$ を対応させる。

M 上のテンソル場　T_pM の双対空間を T_p^*M と記し，その基底を $\{dx^\mu\}$ と書く：

$$\langle dx^\mu, \partial/\partial x^\nu\rangle=\delta^\mu_\nu. \tag{22}$$

これも $(dx^\mu)_p$ と書くべきであるが，p を省略する。外積代数の項でやったように，T_pM 上の (r,s)-テンソル空間 $T^r_{s,p}(M)$ が構成でき，M の各点 p に，その点の (r,s)-テンソル $S_p\in T^r_{s,p}(M)$ を対応させる対応 S を M 上の (r,s)-テンソル場と呼ぶ。S は

$$S(dx^{\mu_1},\cdots,dx^{\mu_r},\partial/\partial x^{\nu_1},\cdots,\partial/\partial x^{\nu_s})\equiv S^{\mu_1\cdots\mu_r}{}_{\nu_1\cdots\nu_s}$$
$$\longrightarrow S=S^{\mu_1\cdots\mu_r}{}_{\nu_1\cdots\nu_s}\,\partial/\partial x^{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\partial/\partial x^{\mu_r}\otimes dx^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_s} \tag{23}$$

と表される。

M 上の k-form　特に k-form $\omega\in\wedge^k T_p^*M$ を対応させる場を k 次(外)微分形式または k-form の場と呼び，その全体を $C^k(M)$ と記す。form の場の場合にも，前の外積，内部積などの演算を，各点 p ごとに行うことによって定義する。M 上の関数 $f\in C^0(M)$ は 0-form とみなす。

外微分 d　k-form の場(以後，"場" は省略)から $(k+1)$-form をつくる線形演算 d を次の性質を持つものとして定義し，外微分(exterior derivative)と呼ぶ。

i)　$dd(\equiv d^2)=0,$　(Poincaré の補題) (24)

ii)　$d(\omega\wedge\chi)=(d\omega)\wedge\chi+(-1)^k\omega\wedge d\chi,$

$$(\omega\in C^k(M),\chi\in C^l(M)) \tag{25}$$

iii)　0-form $f\in C^0(M)$ に対しては，

$$^\forall X\in\mathcal{V}(M) \text{ に対し } \langle X, df\rangle\equiv Xf. \tag{26}$$

この定義より，各座標近傍では，

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right)dx^\mu \qquad (f\in C^0(M) \text{ に対し}), \tag{27}$$

$$\omega\equiv(k!)^{-1}\omega_{\mu_1\cdots\mu_k}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_k}\in C^k(M) \text{ に対し}$$
$$\longrightarrow d\omega=(k!)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\omega_{\mu_1\cdots\mu_k}\right)dx^\nu\wedge dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_k}. \tag{28}$$

de Rham (ドゥ・ラム) の cohomology 群 $H^k(M,\boldsymbol{R})$　$d\omega=0$ なる k-form ω を k 次**閉**形式(closed form)と呼び，その全体を $C^k(M)$ と記す。$d\omega$ の形をした k-form を k 次**完全**形式(exact form)と呼び，その全体を $\mathcal{E}^k(M)$ と記す。Poincaré の補題 $d^2=0$ により，完全形式は自明な閉形式である。商空間

$$H^k(M,\boldsymbol{R}) \equiv \frac{\mathcal{C}^k(M)}{\mathcal{E}^k(M)} \ni [\omega] = \{\omega' \in \mathcal{C}^k(M) \mid \omega' - \omega \in \mathcal{E}^k(M)\} \qquad (29)$$

を，M の k 次元 (de Rham) cohomology 群と呼び，$\dim H^k(M,\boldsymbol{R})$ を M の k 次元 **Betti** (ベッチ) **数**という。$\omega \in \mathcal{C}^k(M)$，$\chi \in \mathcal{E}^l(M)$ なら $\omega\wedge\chi \in \mathcal{E}^{k+l}(M)$ となるから，

$$H(M,\boldsymbol{R}) \equiv \sum_{k=0}^{n} H^k(M,\boldsymbol{R}) \qquad (\text{直和}) \qquad (30)$$

を考えれば，$[\omega] \in H^k(M,\boldsymbol{R})$，$[\chi] \in H^l(M,\boldsymbol{R})$ に対して，積を $[\omega]\cdot[\chi] = [\omega\wedge\chi]$ と定義でき，$H(M,\boldsymbol{R})$ は環となり，これを de Rham の **cohomology algebra** と呼ぶ。

微分写像と pull back　多様体 M から N への写像 ϕ があると，M の接ベクトル $X_p \in T_p(M)$ も自然に N の接ベクトル $(\phi_* X)_{p'} \in T_{p'}(N)$ に，次のように移される：

$$\phi_* : T_p(M) \longrightarrow T_{p'}(N), \qquad (\phi_* X)_{p'} f(p') \equiv X_p(f\circ\phi)(p). \qquad (31)$$

これを ϕ の微分写像 ϕ_* と呼ぶ。(31) は，$p\in M, p'\in N$ の座標 x, y を用いれば

$$(\phi_*(\partial/\partial x^\mu)_p)_{p'} = (\partial y^\nu/\partial x^\mu)(\partial/\partial y^\nu)_{p'} \qquad (32)$$

となり単なる chain rule である。また，これより，双対空間には，逆方向の写像 ϕ^*: $\alpha_{p'} \in T^*_{p'}(N) \to (\phi^*\alpha)_p \in T^*_p(M)$ が自然に誘導される：

$$\phi^* : T^*_{p'}(N) \longrightarrow T^*_p(M), \qquad \langle(\phi^*\alpha)_p, X_p\rangle \equiv \langle\alpha_{p'}, (\phi_* X)_{p'}\rangle. \quad (33)$$

これも，座標表示で書けば当然の式

$$(\phi^*(dy^\nu)_{p'})_p = (\partial y^\nu/\partial x^\mu)(dx^\mu)_p \qquad (34)$$

である。$\alpha_{p'} \in T^*_{p'}(N)$ は 1-form であるが，より一般の k-form 場 $\omega \in C^k(N)$ に対しても

$$\phi^* : (\phi^*\omega)_p(X^1_p, \cdots, X^k_p) \equiv \omega_{p'}((\phi_* X^1)_{p'}, \cdots, (\phi_* X^k)_{p'}) \quad (35)$$

と定義し，(33), (35) の ϕ^* を pull back (ひきもどし) と呼ぶ。

テンソル場の変換と Lie 微分　もし $\phi: M\to N$ が微分同相写像 (ϕ^{-1} がある) なら，一般の混合テンソル S に対しても，(35) と同様な変換が誘導される：

$$\begin{aligned}
&\Phi:\ S_{p'} \in T^r_{s,p'}(N) \longrightarrow (\Phi S)_p \in T^r_{s,p}(M),\ \ (\alpha^i \in C^1(M), X^i \in \mathcal{V}(M))\\
&\quad(\Phi S)_p(\alpha^1_p, \cdots, \alpha^r_p, X^1_p, \cdots, X^s_p)\\
&\qquad \equiv S_{p'}((\phi^{-1*}\alpha^1)_{p'}, \cdots, (\phi^{-1*}\alpha^r)_{p'}, (\phi_* X^1)_{p'}, \cdots, (\phi_* X^s)_{p'}). \quad (36)
\end{aligned}$$

ベクトル場 $X = \xi^\mu(\partial/\partial x^\mu)$ により誘起される無限小変換 ϕ_t: $p\in M \to$

$\phi_t(p)\in M$,

$$x^\mu(p)\longrightarrow x_t'^\mu\equiv x^\mu(\phi_t(p))\equiv x^\mu+\xi^\mu(x)t+O(t^2), \tag{37}$$

に対し，対応するテンソル場 S の変換 (36) を Φ_t と記したとき，

$$(\mathcal{L}_X S)_p\equiv\frac{d}{dt}\Phi_t(S_{\phi_t(p)})\Big|_{t=0} \tag{38}$$

を **Lie 微分**と呼ぶ。この演算は $f\in C^0(M)$, $Y\in\mathcal{V}(M)$ に対しては

$$\mathcal{L}_X f=Xf, \qquad \mathcal{L}_X Y=[X, Y] \tag{39}$$

となり，k-form $\omega\in C^k(M)$ に対しては次のようになる：

$$(\mathcal{L}_X \omega)(X_1, \cdots, X_k)=X[\omega(X_1, \cdots, X_k)] -\sum_{i=1}^{k}\omega(X_1, \cdots, [X, X_i], \cdots, X_k). \tag{40}$$

さらに i_X を (8) の内部積，$(i_X\omega)(X_1, \cdots, X_k)\equiv\omega(X, X_1, \cdots, X_k)$，とすれば，これらの演算の間には，次の関係がある：

1）$(\phi_1\circ\phi_2)_*=\phi_{1*}\circ\phi_{2*}$, $\quad(\phi_1\circ\phi_2)^*=\phi_2^*\circ\phi_1^*$,
$\phi^*(\omega\wedge\chi)=\phi^*\omega\wedge\phi^*\chi$, $\quad\phi^*(d\omega)=d(\phi^*\omega)$, (41)

2）$\mathcal{L}_X(\omega\wedge\chi)=(\mathcal{L}_X\omega)\wedge\chi+\omega\wedge(\mathcal{L}_X\chi)$, $\quad\mathcal{L}_X(d\omega)=d(\mathcal{L}_X\omega)$, (42)

3）$i_X d+d\, i_X=\mathcal{L}_X$ 　（ホモトピー公式）(43)

4）$\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y-\mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X=\mathcal{L}_{[X,Y]}$, $\quad\mathcal{L}_X i_Y-i_Y\mathcal{L}_X=i_{[X,Y]}$. (44)

微分形式の多様体上の積分　向き付けられた多様体 M 上の n-form ω は，一つの座標近傍系 (U,ϕ) で，ω（正確には $\phi^{-1*}\omega$）$=a(x)\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ と表され，ω の台 (support) が U に入っている場合，その M 上の積分は次式で定義される：

$$\int_M\omega\equiv\int_{\phi(U)\subset\boldsymbol{R}^n} a(x)\,dx^1dx^2\cdots dx^n. \tag{45}$$

右辺は通常の $\boldsymbol{R}^n$ における n 重積分である。ω の台を一つの座標近傍で覆い切れないときは，適当に分割して，それぞれの寄与の和で定義する。

単体と chain　$\boldsymbol{R}^n$ で，$(k+1)$ 個の点 $(P_0, P_1, \cdots, P_k)$ を頂点とし直線でつないで得られる k 次元超三角錐体 $\varDelta'$ を Euclid **k-単体** (k-simplex) と呼ぶ。0-単体は 1 点，1-単体は直線，2-単体は三角形，3-単体は三角錐（四面体）である。このとき向き付けを入れる。すなわち単体 $\varDelta'\equiv(P_0, \cdots, P_n)$ の頂点が偶置換 σ で並べ変えられたもの $(P_{\sigma(0)}, \cdots, P_{\sigma(n)})$ とは同一視するが，奇置換の場合は区別して $-\varDelta'$ と記す。この規約の下で，k-単体 $\varDelta'$ の境界 $\partial\varDelta'$ とは，$(k-1)$-単体の次の和

$$\partial\Delta' = \partial(P_0, P_1, \cdots, P_k) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^k(P_0, \cdots, \check{P}_i, \cdots, P_k) \qquad (46)$$

($\check{P}_i$ は P_i を除く意) で定義される。例えば，四面体 (3-単体) の境界は，その表面の四つの三角形 (2-単体) である。[向きの意味は，この例をやってみて会得されたい。]　k-単体 Δ'_i の形式的な実数係数の線形結合

$$C' = \sum_i m_i \Delta'_i \qquad m_i \in \boldsymbol{R} \qquad (47)$$

を Euclid **k-chain** と呼ぶ。k-chain C' の境界は $\partial C' \equiv \sum m_i \partial\Delta'_i$ で定義され，このとき

$$\partial^2 C' \equiv \partial(\partial C') = 0 \qquad (48)$$

が成り立つ。[これは単体の場合に確かめれば十分で，それは (46) からすぐ出る。]　多様体 M 中の k-単体 Δ は，$\boldsymbol{R}^k$ から M への任意の微分可能写像 ϕ で，Euclid 単体 Δ' を写したもの $\Delta = \phi(\Delta')$ として定義する。M 中の k-chain C は $C = \sum m_i \Delta_i$ と定義し，その全体を $C_k(M)$ と記す。k-単体 Δ の境界 $\partial\Delta$ は，$\phi(\partial\Delta')$ で与えられる $(k-1)$-単体で，$\partial C \equiv \sum m_i \partial\Delta_i$ で定義される**境界作用素** (boundary operator) $\partial: C_k(M) \to C_{k-1}(M)$ は，(48) よりただちに $\partial^2 = \partial\cdot\partial = 0$ を満たすことがわかる。$\partial C = 0$ を満たす k-chain C は **k-cycle** と呼ばれ，その全体を $Z_k(M)$ と記す。∂C の形をした k-chain は，$\partial^2 = 0$ より自明な k-cycle であり，境界 cycle (または単に境界) と呼ばれ，その全体を $B_k(M)$ と記す，商空間

$$H_k(M, \boldsymbol{R}) \equiv \frac{Z_k(M)}{B_k(M)} \ni [C] = \{C' \in Z_k(M) \mid C' - C \in B_k(M)\} \qquad (49)$$

は，(加法群をなし) k 次元 homology 群と呼ばれる。

k-chain 上の積分　k-form $\omega \in C^k(M)$ の，M 中の k-chain $C = \sum_i m_i \Delta_i$ 上での積分 $\int_C \omega$ は，次のように定義する：各 k-単体 $\Delta_i \equiv \phi_i(\Delta'_i)$ を Euclid 単体 Δ'_i の像として与える $\boldsymbol{R}^k$ から M への写像を ϕ_i，それによる pull back $\phi_i^*\omega$ の $\boldsymbol{R}^k$ における Δ'_i 近傍での表示が $\phi_i^*\omega = a(x)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$，としたとき，

$$\int_C \omega \equiv \sum_i m_i \int_{\Delta_i} \omega \equiv \sum_i m_i \int_{\Delta'_i \subset \boldsymbol{R}^k} a(x)\, dx^1 dx^2 \cdots dx^k. \qquad (50)$$

Stokes の公式　C を M 上の k-chain，∂C をその境界，ω を M 上の $(k-1)$-form とすれば

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega \qquad (51)$$

が成り立つ。これを Stokes の公式と呼ぶ。

de Rham の定理　k-form $\omega\in C^k(M)$ を，k-chain の空間 $C_k(M)$ の双対空間の元，**cochain**，とみなせば，Stokes の公式 (51) は

$$\langle d\omega, C\rangle=\langle\omega, \partial C\rangle \tag{52}$$

と書けて，ちょうど外微分 d が cochain ω の双対境界作用素であることを示している。特に，de Rham の cohomology 群 (30) の元 $[\omega]$ と，homology 群 (49) の元 $[C]$ の内積は

$$([\omega],[C])=\int_C\omega \tag{53}$$

で (Stokes の公式により代表元の選び方によらず) 定義でき，この内積を通して，de Rham のコホモロジー群 $C^k(M)/\mathcal{E}^k(M)$ は，あらかじめ使った名前通り，homology 群 $H_k(M,\boldsymbol{R})$ に双対なコホモロジー群 $H^k(M,\boldsymbol{R})$ となる。これを de Rham の定理という。

ここまでは M に計量が入っていることを仮定しなかった。次に計量が存在する場合を少し述べる。

直交曲線座標系　M 上の計量 g とは，M 上の 2 階共変テンソル場 g で，各点 p で g_p が接空間 T_pM の計量の条件を満たすものをいう。M の座標系 (x^μ) は，g が

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)\equiv g_{\mu\nu}=\mathrm{diag.}(\lambda_1, \cdots, \lambda_s, -\lambda_{s+1}, \cdots, -\lambda_{s+t}) \tag{54}$$
$$(\lambda_i>0,\ \ s+t=n)$$

の対角形をとるとき，直交曲線座標系と呼ぶ。このとき $\{\sqrt{\lambda}\,dx^\mu\}$ は T^*_pM の正規直交基底である。計量 g に伴われる自然な体積要素 η は，

$$\begin{aligned}\eta&=\sqrt{\prod_{i=1}^n\lambda_i}\,dx^1\wedge dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n &&(\text{直交曲線座標系のとき})\\ &=\sqrt{(-)^t\det g}\,dx^1\wedge dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n &&(\text{一般の座標系のとき})\end{aligned} \tag{55}$$

となる。

codifferential $\boldsymbol{\delta}$　Hodge の $*$ 作用素は前の (14) と同様

$$*\omega(X_{k+1}, \cdots, X_n)\eta\equiv\omega\wedge\tilde{g}(X_{k+1})\wedge\cdots\wedge\tilde{g}(X_n) \tag{56}$$
$$(\omega\in C^k(M),\ \ X_i\in\mathcal{V}(M))$$

で定義される。これを用いれば，k-form から $(k-1)$-form をつくる線形作用素 δ: $C^k(M)\to C^{k-1}(M)$ が導入できる：

$$\delta\omega\equiv(-)^{n(k+1)+1+t}*d*\omega \qquad (\omega\in C^k(M)). \tag{57}$$

この演算 δ は，M 上の k-form $\omega, \chi\in C^k(M)$ の間の内積を

$$(\omega, \chi) \equiv \int_M \omega \wedge *\chi \quad (=(\chi, \omega)) \tag{58}$$

と定義したときの，外微分 d の双対演算である；すなわち，Stokes の公式より

$$(\omega, d\chi) = (\delta\omega, \chi) \qquad (\text{部分積分ができるとして}) \tag{59}$$

が成り立つ。また，次の公式が成立する：

1）　$\delta^2 = 0, \quad *\delta d = d\delta *, \quad *d\delta = \delta d *, \quad d*\delta = \delta * d = 0$　(60)

2）　$*(\delta\omega) = (-1)^k d(*\omega),$
　　$\delta(*\omega) = (-1)^{k+1} * d\omega$　$(\omega \in C^k(M))$　(61)

Laplace-Beltrami 作用素 Δ　多様体 M 上の Laplacian として，次の k-form を k-form に写す作用素 Δ が定義される。

$$\Delta : C^k(M) \to C^k(M), \quad \Delta \equiv (\delta + d)^2 = \delta d + d\delta. \tag{62}$$

文献解説

本文中にほとんど文献を引用しなかったので，ここに一括してあげておく。教科書の類は日本語で読めるものを優先した。この文献解説は読者の便宜のためのものであり，本文の内容に直接関連した文献に限った。決して完全な文献表を作ることを意図したものでないので，引用から脱落している著者方にはお許し頂きたい。

6. 対称性の自発的破れ

対称性の自発的破れの概念を明確な形で初めて場の理論にもちこんだのは

(6.1) Y. Nambu and G. Jona-Lasinio : Phys. Rev. **112** (1961) 345.

Goldstone 模型を例にとって南部-Goldstone 定理をもっとわかりやすい形で提示したのは

(6.2) J. Goldstone : Nouvo Cim. **19** (1961) 154.

この定理の場の量子論的一般証明は文献 (4.11) で与えられた。

S 行列の可能な Bose 的対称性としては，Poincaré 生成子以外にはスカラー電荷しかないこと (いわゆる no-go 定理) の証明は

(6.3) S. Coleman and Mandula : Phys. Rev. **159** (1967) 1251.

Fermi 的超対称性を考えても，1階のスピノール電荷のみであることは

(6.4) R. Haag, J. Łopuszanski and M. Sohnius : Nucl. Phys. **B88** (1975) 257

QCD のゲージ可変軸性 $U(1)$ カレントの Goldstone ボソンのテンソル構造については次の文献およびそこで引用されている文献を見よ：

(6.5) H. Hata, T. Kugo and N. Ohta : Nucl. Phys. **B178** (1981) 527.

いわゆる $U(1)$ 問題についての日本語での解説は

(6.6) 河原林研：素粒子のカイラル対称性——$U(1)$ 問題をめぐって (物理学最前線 5, 共立出版, 1983).

南部-Jona-Lasinio 模型で σ や π の結合状態を本書では補助場の方法で解析したが，この方法はこの模型の 2 次元時空版 Gross-Neveu 模型の解析において先に用いられた：

(6.7) D. Gross and A. Neveu : Phys. Rev. **D10** (1974) 3235.

補助場の方法を湯川型相互作用の場合にも使えるよう拡張して結合状態場の有効作用を与え，Schwinger-Dyson 方程式や Bethe-Salpeter 方程式との関連を明らかにしたのは

(6.8) T. Kugo : Phys. Letters **76 B** (1978) 625.

π 中間子をはじめとする擬スカラー・ボソンがカイラル対称性の自発的破れに

伴うNGボソンであることは，1960年代，種々な低エネルギー定理やカレント代数の成功により確かめられた。これらについては次の論文選集を参照されたい：

(6.9) S. L. Adler and R. F. Dashen：*Current Algebra* (Benjamin / Cummings, 1968).

非線形表現 Lagrangian の一般論は

(6.10) S. Coleman, J. Wess and B. Zumino：Phys. Rev. **177** (1969) 2239,

(6.11) C. G. Callan, S. Coleman, J. Wess and B. Zumino：Phys. Rev. **177** (1969) 2247.

本文 **6-3**，**6-4** の記述は次の総合報告に従った：

(6.12) M. Bando, T. Kugo and K. Yamawaki：Phys. Reports **164** (1988) 217.

S 行列が場の変数の選び方によらないことの証明は

(6.13) S. Kamefuchi, L. O'Raifeartaigh and A. Salam：Nucl. Phys. **28** (1961) 529.

ゲージ場が存在するときにはNG粒子が必ずしも現れないことの指摘は

(6.14) P. W. Higgs：Phys. Letters **12** (1964) 132,

の他 Anderson, Englert-Brout, Guralnik-Hagen-Kibble らによっても独立になされた。Higgs模型を用いて Coulomb ゲージでこの考えを明確に定式化したのが

(6.15) P. W. Higgs：Phys. Rev. **145** (1966) 1156.

この Higgs 機構を非可換ゲージ理論の場合へ拡張したのは

(6.16) T. W. B. Kibble：Phys. Rev. **155** (1967) 1554.

共変な演算子型式における Higgs 機構の明解な説明は

(6.17) N. Nakanishi：Prog. Theor. Phys. **49** (1973) 640；**50** (1973) 1381, 1388.

で与えられた。[その非可換ゲージ理論版は (5.19) である。]

't Hooft-Feynman ゲージを与えたのは 't Hooft の第二論文 (5.35) で，これを一般化した R_ξ ゲージの導入は

(6.18) K. Fujikawa, B. W. Lee and A. I. Sanda：Phys. Rev. **D6** (1972) 2923.

Higgs 現象逆定理の証明，およびその“例外”条件としての $u=-1$ がカラー閉じ込めのための十分条件になっていることの初めての指摘は

(6.19) T. Kugo and I. Ojima：京都大学プレプリント KUNS-486 (1979).

この論文の内容は総合報告 (5.20) のVI章でも見ることができる。$u=-1$ の条件が，摂動論では自発的に破れている“局所”ゲージ対称性がダイナミカルに回復する条件と同等であることを示したのは

(6.20) H. Hata：Prog. Theor. Phys. **67** (1982) 1607；**69** (1983) 1524.

このカラー閉じ込めの機構をさらに詳しく分析したのは

(6.21) K. Nishijima：Phys. Letters **116B** (1982) 295；Prog. Theor. Phys. **72** (1984) 631；**74** (1985) 889；**75** (1986) 1221；**77** (1987) 1035；Prog. Theor. Phys. Supplement **86** (1986) 253.

Weinberg-Salam模型の原論文は

(6.22) S. Weinberg : Phys. Rev. Letters **19** (1967) 1264,

(6.23) A. Salam : in *Elementary Particle Theory* ed. by N. Svartholom (Almquist and Forlag, 1968) p. 367.

(Weinberg-Salam模型以前の)弱い相互作用に関する全般的教科書としては

(6.24) R. E. Marshak, Riazuddin and C. P. Ryan : *Theory of Weak Interactions in Particle Physics* (John Wiley & Sons, 1969)

(6.25) 山田勝美，森田正人，藤井昭彦：ベータ崩壊と弱い相互作用(新物理学シリーズ15，培風館，1974)

本書では詳しく触れることのできなかったハドロンのクォーク模型については，その発展の歴史も含めて次の教科書を見られたい：

(6.26) 小川修三，沢田昭二，中川昌美：素粒子の複合模型(物理学選書，岩波書店，1980)

GIM機構を提唱した原論文は

(6.27) S. L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani : Phys. Rev. **D2** (1970) 1285.

WS模型でCP対称性を破る可能性からクォーク6元模型を提唱したのは

(6.28) M. Kobayashi and T. Maskawa : Prog. Theor. Phys. **49** (1973) 652.

WS模型でアノマリーがクォーク・レプトン間で相殺していることの指摘は

(6.29) C. Bouchiat, J. Iliopoulos and Ph. Meyer : Phys. Letters **38B** (1972) 519,

(6.30) D. Gross and R. Jackiw : Phys. Rev. **D6** (1972) 477.

$SU(5)$や$SO(10)$に基づく大統一理論への試みは

(6.31) H. Georgi and S. L. Glashow : Phys. Rev. Letters **32** (1974) 438,

(6.32) H. Fritzsch and P. Minkowski : Ann. Phys. **93** (1975) 193.

6-7最後に紹介したWS模型での電荷の普遍性の証明は

(6.33) 青木健一：素粒子論研究 **59** (1979) 383.

7. くりこみ

Pauli-VillarsおよびGuptaのregulatorによる正則化は

(7.1) W. Pauli and F. Villars : Rev. Mod. Phys. **21** (1949) 434,

(7.2) S. N. Gupta : Proc. Phys. Soc. **A66** (1953) 129.

複素次元に拡張する次元正則化を導入したのは

(7.3) G. 't Hooft and M. Veltman : Nucl. Phys. **B44** (1972) 189.

朝永-Schwinger-Feynman-Dysonのくりこみ理論の原論文の主なものは

(7.4) 日本物理学会編：量子電磁力学I，II(新編物理学選集4，9)

に収録されているのでここではいちいちあげない。

BPHZくりこみのスキームは，まず，

(7.5) N. N. Bogoliubov and O. S. Parasiuk : Acta Math. **97** (1957) 227

で与えられ，R演算後の量が有限であることの完全な証明は

(7.6) K. Hepp : Comm. Math. Phys. **2** (1966) 301

でなされた。この R 演算を運動量表示の Feymman 被積分関数に直接働くものに定義し直し，正則化に依存しない形にしたのは

(7.7) W. Zimmermann : Comm. Math. Phys. **15** (1969) 208.

次数勘定定理は，Dyson の原論文で初めて触れられているが，その証明は

(7.8) N. Nakanishi : 素粒子論研究 **12** (1956) 217; **13** (1956) 89; Prog. Theor. Phys. **17** (1957) 401; J. Math. Phys. **4** (1963) 1385,

(7.9) S. Weinberg : Phys. Rev. **118** (1960) 838,

(7.10) Y. Hahn and W. Zimmermann : Comm. Math. Phys. **10** (1968) 330,

(7.11) W. Zimmermann : Comm. Math. Phys. **11** (1968) 1,

で与えられた。ただし，(7.9)，(7.10) は Euclid 化した理論の収束証明であり，(7.11) は Minkowski の場合の証明であるが $-i\epsilon$ 項を $-i\epsilon(\boldsymbol{k}^2+m^2)$ に変更していて Lorentz 不変性が明らかでない。

BPHZ の R 演算を施したくりこまれた Feynman 積分が収束することの証明は，(7.11) の次数勘定定理に基づいて (7.7) で与えられた。直接 Minkowski 運動量でかつ明白に Lorentz 不変な形での証明は，Feynman パラメータ公式での R 演算を用いて

(7.12) T. Appelquist : Ann. Phys. **54** (1969) 27,

(7.13) S. A. Anikin, O. I. Zavialov and M. K. Polivanov : Theor. Math. Phys. **17** (1974) 1082.

で与えられた。この証明は中西の教科書 (2.3) の 6 章にも詳しく説明されている。

対称性とくりこみに関しては Coleman の簡潔な講義がある：

(7.14) S. Coleman : "Renormalization and Symmetry" in *Properties of Fundamental Interactions* (Proc. of International School of Physics "Ettore Majorana", Editrice Compositori, 1973)

7-3 最後の小節はこれに従った。そこで触れた Symanzik の定理は

(7.15) K. Symanzik : in *Fundamental Interactions at High Energies* (Perlmutter 他編, Gordon and Breach, 1970)

非可換ゲージ理論のくりこみ可能性は，ユニタリー性と共に，'t Hooft により初めて証明された：第一論文 (5.15) が零質量 Yang-Mills 場の場合，第二論文 (5.35) が自発的破れで質量を持つようになった場合，を扱っている。前にも述べたように，これをより詳しく展開したのが B. Lee-Zinn-Justin (5.36) および 't Hooft-Veltman (5.32) である。これらのくりこみ可能性の証明を，BRS 不変性に基づいて (原理的には) より簡単化したのは BRS の論文 (5.16) である。これをさらに **7-4** で与えたような形にやさしくした議論は，Zinn-Justin および B. Lee の講義 (5.30)，(5.31) や Taylor の次の教科書に見られる：

(7.16) J. C. Taylor : *Gauge Theories of Weak Interactions* (Cambridge Univ. Press, 1976).

7-4 のくりこみ方程式の一般解の形 **7-4** (44) の証明は

(7.17) S. Joglekar and B. W. Lee : Ann. Phys. **97** (1976) 160.

質量によらないくりこみ法は，もともと，くりこみ群方程式を簡単化する意図の下に，'t Hooft と Weinberg により独立に提案された：

(7.18) G. 't Hooft：Nucl. Phys. **B61** (1973) 455,

(7.19) S. Weinberg：Phys. Rev. **D8** (1973) 3497.

前者は次元正則化の特性に，後者は Fermi 場のカイラル対称性に，強く依存した議論になっていたが，質量によらないくりこみ法の本質がむしろくりこみ条件の設定の仕方にあることを指摘したのは

(7.20) C. G. Callan："The New-Improved Renormalization Group for Scalar Fields", Princeton 大学プレプリント, 1973.

このくりこみ法を用いて，対称性の自発的に破れた理論を対称な理論の相殺項でくりこめることを示したのは

(7.21) T. Kugo：Prog. Theor. Phys. **57** (1977) 593.

本文で与えたものとは大分異なるが，ゲージ場の質量項を加えて赤外発散の正則化をはかることを提案したのは

(7.22) A. A. Slavnov：Phys. Letters **98B** (1981) 57.

8. くりこみ群と演算子積展開

演算子積展開 (OPE) は Wilson により初めて提唱された：

(8.1) K. G. Wilson：Phys. Rev. **179** (1969) 1499.

摂動論の枠内で初めて OPE の妥当性を証明したのは

(8.2) W. Zimmermann：in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory* (Deser 他編, MIT press, 1970).

これには，BPHZ くりこみの“森”の概念による定式化，複合演算子の正規積の定義など詳しく議論されており，**8-1** の記述は主にこれに従っている。**8-1** で触れた正規積の概念を用いて WT 恒等式を導く手法は

(8.3) J. H. Lowenstein and B. Schroer：Phys. Rev. **D6** (1972) 1553; **D7** (1973) 1929

において初めてアノマリーに関連して用いられた。

くりこみ群方程式は，QED において Stueckelberg-Petermann および Gell-Mann-Low により初めて導入された：

(8.4) E. C. G. Stueckelberg and A. Petermann：Helv. Phys. Acta **26** (1953) 499,

(8.5) M. Gell-Mann and F. E. Low：Phys. Rev. **95** (1954) 1300.

この方法をさらに発展させた Bogoliubov らの仕事は

(8.6) N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov：*Introduction to the Theory of Quantized Fields* (Interscience Pub., 1959)

に詳しく述べられている。

Callan-Symanzik (CS) 方程式を初めて導いたのは

(8.7) K. Symanzik：Comm. Math. Phys. **18** (1970) 227,

(8.8) C. G. Callan：Phys. Rev. **D2** (1970) 1541.

CS 方程式を導く 8-2 で述べたような簡単な方法を与えたのは

(8.9) S. Coleman："Dilatation" [(7.14) と同じ文献に収録].

BPHZ くりこみの枠内でくりこみ群方程式，CS 方程式を導く方法を与えたのは

(8.10) J. H. Lowenstein：Comm. Math. Phys. **24** (1971) 1.

質量によらないくりこみ法に基づく斉次くりこみ群方程式を与えたのは，上述の 't Hooft (7.18), Weinberg (7.19) である。この斉次くりこみ群方程式が，順次質量挿入項の多い頂点関数とつながる無限個の一般化された CS 方程式の組と等価であることを示したのは

(8.11) S. W. MacDowell：Phys. Rev. **D12** (1975) 1089,

(8.12) K. Nishijima and Y. Tomozawa：Prog. Theor. Phys. **57** (1977) 654,

および文献 (7.21) である。

非可換ゲージ理論が漸近的自由性を持つことの発見は

(8.13) D. J. Gross and F. Wilczek：Phys. Rev. Letters **30** (1973) 1343; Phys. Rev. **D8** (1973) 3633,

(8.14) H. D. Politzer：Phys. Rev. Letters **30** (1973) 1346.

Wilson の演算子積展開の係数の短距離 (または光円錐近傍) の振舞いを求めるのにくりこみ群 (CS) 方程式を適用したのは

(8.15) K. Symanzik：Comm. Math. Phys. **23** (1971) 49,

(8.16) C. G. Callan：Phys. Rev. **D5** (1972) 3202,

(8.17) N. Christ, B. Hasslacher and A. Mueller：Phys. Rev. **D6** (1972) 3543.

QCD での Bjorken スケール則の対数的破れの計算は

(8.18) H. Georgi and H. D. Politzer：Phys. Rev. **D9** (1974) 416,

(8.19) D. J. Gross and F. Wilczek：Phys. Rev. **D9** (1974) 980,

で与えられた。その他，これらくりこみ群の技法を QCD に適用した具体的応用例は次の文献を参照されたい：

(8.20) D. J. Gross："Applications of Renormalization Group to High Energy Physics" in *Methods in Field Theory*, Les Houches 1975 (North-Holland, 1976),

(8.21) T. Muta：*Foundations of Quantum Chromodynamics* (World Scientific, 1987).

くりこみ群の手法は Wilson により臨界現象の問題に適用され大きな成功を収めた。これについては

(8.22) K. G. Wilson and J. Kogut：Phys. Reports **12C** (1974) 76.

これはまたくりこみ操作の意味についても新しい見方をもたらした。新しい見方からのくりこみについては，例えば

(8.23) J. Polchinski：Nucl. Phys. **B231** (1984) 269.

(8.24) 青木健一：数理科学 No. 312 (1989) 34.

9. アノマリー

カイラル・アノマリーの存在を最初に明確に認識したのは

(9.1) S. L. Adler : Phys. Rev. **177** (1969) 2426,

(9.2) J. S. Bell and R. Jackiw : Nouvo Cim. **60 A** (1969) 47.

$\pi^0 \to 2\gamma$ 崩壊の幅の計算も (9.1) で行われ，クォークが 3 のカラー自由度を持つべきことが既に指摘されている。アノマリーが高次の輻射補正を受けないという Adler-Bardeen の定理の証明

(9.3) S. L. Adler and W. A. Bardeen : Phys. Rev. **182** (1969) 1517

や，非可換ゲージ理論の場合への拡張

(9.4) W. A. Bardeen : Phys. Rev. **184** (1969) 1848,

さらには，アノマリーがカレント交換関係のアノマリーも意味することの認識など，多くのことがすぐに明らかにされた。この時点での詳細な講義が Adler によってなされている：

(9.5) S. L. Adler : in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory* (Deser 他編, MIT Press, 1970).

9-1 (3) の Δ が局所量の積分で与えられることの厳密な証明は

(9.6) Y. M. Lam : Phys. Rev. **D 6** (1972) 2145; **D 7** (1973) 2943,

(9.7) T. E. Clark and J. H. Lowenstein : Nucl. Phys. **B 113** (1976) 109.

アノマリー Δ に対する Wess-Zumino 無矛盾性条件は

(9.8) J. Wess and B. Zumino : Phys. Letters **37 B** (1971) 95

において初めて指摘され，擬スカラー・ボソンのゲージ場と結合した系の有効 Lagrangian を決定するのに用いられた。アノマリーに対する **9-1** で述べたようなくりこみの障害としての捉え方は BRS (5.16) による。アノマリーの代数的側面，特に $2n$ 次元時空でのアノマリーが $(2n+2)$ 次元の可換アノマリーと関係していることは次の人々により指摘された：

(9.9) L. Baulieu : Nucl. Phys. **B 241** (1984) 557; in *Progress in Gauge Field Theory*, Cargese 1983 (Plenum, 1984),

(9.10) R. Stora : in *Progress in Gauge Field Theory*, Cargese 1983 (Plenum, 1984),

(9.11) B. Zumino : in *Relativity, Groups and Topology* II, Les Houches 1983 (Elsevier Science Publishers, 1984).

9-1 後半の記述はこれらに従っている。そこで触れた BRS 変換の超場形式は初め

(9.12) S. Ferrara, O. Piguet and S. Schweda : Nucl. Phys. **B 119** (1977) 493,

(9.13) Fujikawa : Prog. Theor. Phys. **59** (1978) 2045

により与えられたものだが，反 BRS 変換を含めたその拡張は

(9.14) L. Bonora and P. Tonin : Phys. Letters **98 B** (1981) 48.

次元正則化によるアノマリーの導出は，次元正則化を提唱した 't Hooft-Veltman (7.3) で既に与えられた。アノマリーが存在しないための条件を **9-2** (43) のような簡単な形で初めて与えたのは

(9.15) H. Georgi and S. Glashow : Phys. Rev. **6** (1972) 429.

アノマリーが経路積分測度の変数変換の下での Jacobian として捉えられること

を初めて指摘し，その計算法を与えたのは

(9.16) K. Fujikawa：Phys. Rev. Letters **42** (1979) 1195; **44** (1980) 1733; Phys. Rev. **D21** (1980) 2848; **D22** (1980) 1499 (E); Lecture in *Quantum Gravity and Cosmology*, Kyoto Summer Institute 1985 (佐藤，稲見編，World Scientific, 1986).

藤川の方法を非可換アノマリーの導出に適用する際には，正則化の仕方により，いわゆる covariant anomaly, consistent anomaly と呼ばれる二種の形がでる。consistent anomaly を導く本文の正則化は次の文献に従った：

(9.17) L. Alvarez-Gaumé and P. Ginsparg：Nucl. Phys. **B243** (1984) 449.

この文献では，本文で概略しか述べなかった，$2n$ 次元非可換アノマリーを直接 $(2n+2)$ 次元可換アノマリーに関係づける位相幾何学的議論が与えられている。

アノマリーと南部-Goldstone (NG) ボソンの関係を初めて議論したのは，上にあげた Wess-Zumino (9.11) である。Wess-Zumino の無矛盾性条件を満たすカイラル有効作用の形を初めて5次元積分形の閉じた形で与え，その大局幾何学的意味を明らかにしたのは

(9.18) E. Witten：Nucl. Phys. **B223** (1983) 422,

WZ 無矛盾性条件を解いてカイラル有効作用を求める方法は多くの人により与えられたが，本文で述べたものに近いのは

(9.19) A. Manohar and G. Moore：Nucl. Phys. **B243** (1984) 55.

アノマリーの関係する過程に対する予言と実験値とのつき合わせについては割合最近の文献を二つだけあげておこう：

(9.20) G. Kramer, W. F. Palmer and S. S. Pinsky：Phys. Rev. **D30** (1984) 594,

(9.21) J. F. Donoghue, B. R. Holstein and Y. -C. R. Lin：Phys. Rev. Letters **55** (1985) 2766.

Adler-Bardeen の定理については，その後多くの人に種々な方法で厳密化されたが，BPHZ 流のを一つだけあげれば

(9.22) G. Bandelloni, C. Becchi, A. Blasi and R. Collina：Comm. Math. Phys. **72** (1980) 239.

't Hooft のアノマリー釣合い条件については

(9.23) G. 't Hooft：in *Recent Developments in Gauge Theories* ('t Hooft 他編，Plenum, 1980)

(9.24) S. Coleman and B. Grossman：Nucl. Phys. **B203** (1982) 205.

10. 付録，その他

付録 E で述べた微分形式については，例えば

(10.1) H. フランダース：微分形式の理論 (岩堀訳，岩波書店，1967),

(10.2) V. I. アーノルド：古典力学の数学的方法 (安藤他訳，岩波書店，1980).

付録 E を書くに際しては，京都大学理学部3年生の物理数学演習のために風間洋一氏の作られた演習問題ノートを非常に参考にさせて頂いた。

演習問題でしか触れられなかった超対称性に関しては次の教科書を読まれたい：

(10.3) J. Wess and J. Bagger：*Supersymmetry and Supergravity* (Princeton Univ. Press, 1982),

超重力理論については日本語の本がある：

(10.4) 藤井保憲：超重力理論入門(マグロウヒルブック, 1987).

演習問題略解

演習問題 6.

6.1 1） 問題2.5と同様だが，g_{ijk} が添字について完全対称であることから従う等式 $g_{ijk}(\theta^T\epsilon\xi_i)\xi_j^T\epsilon\xi_k=0$ に注意せよ。そうすれば容易に $\delta(\theta)\mathcal{L}=\partial_\mu(\theta^\alpha X_\alpha^\mu+\text{h. c.})$ が示せる。ただし

$$X_\alpha^\mu=-\frac{1}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\xi^i)_\alpha\partial_\nu\varphi_i^\dagger+i\epsilon_{\alpha\beta}(\sigma^\mu\xi_i^*)^\beta\left[\frac{1}{2}f^i+m^{ij}\varphi_j^\dagger+g^{ijk}\varphi_j^\dagger\varphi_k^\dagger+\lambda^i\right].$$

2） 今，変換パラメータ θ_α が Grassmann 数であることに注意して，**1-3**(6) の Noether カレントの公式を次のように読む：

$$\theta^\alpha J_\alpha^\mu(x)+\text{h. c.}=(\delta(\theta)\phi_i)(\partial/\partial(\partial_\mu\phi_i))\mathcal{L}-(\theta^\alpha X_\alpha^\mu+\text{h. c.}).$$

これを計算すれば，

$$J_\alpha^\mu(x)=-(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\xi^i)_\alpha\partial_\nu\varphi_i^\dagger-i\epsilon_{\alpha\beta}(\sigma^\mu\xi_i^*)^\beta[m^{ij}\varphi_j^\dagger+g^{ijk}\varphi_j^\dagger\varphi_k^\dagger+\lambda^i]$$

を得る。正準交換関係，運動方程式，特に，f の運動方程式 $f^i=-(m^{ij}\varphi_j^\dagger+g^{ijk}\varphi_j^\dagger\varphi_k^\dagger+\lambda^i)$ を用いれば，容易に，$^\forall\phi_i=(\varphi^i,\xi^i,f^i,\varphi_i^\dagger,\xi_i^*,f_i^\dagger,\pi_i\equiv\dot{\varphi}_i^\dagger,\pi^{\dagger i}\equiv\dot{\varphi}^i)$ に対し

$$[i(\theta^\alpha Q_\alpha+\theta_{\dot{\alpha}}^*\bar{Q}^{\dot{\alpha}}),\phi_i(x)]=\delta(\theta)\phi_i(x),$$

が確かめられる。また $\{Q_\alpha,\bar{Q}_{\dot{\beta}}\}=(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}P_\mu$ 等も，全微分項を落とせば，直接確かめられる。

3） $\xi^i(x)$ の変換則の真空期待値 $\langle 0|[iQ_\alpha,\xi_\beta^i(x)]|0\rangle=-\epsilon_{\alpha\beta}\langle 0|f^i(x)|0\rangle$ より，$\langle 0|f^i(x)|0\rangle\neq 0$ であれば，Q_α は自発的に破れ，$\xi^i(x)$ が NG フェルミオンであることがわかる。

4） ボソンのみが0でない定数の真空期待値を持ち得るから，有効ポテンシャル V は $V(\varphi,f)=-f_i^*f^i-[m(\varphi^1f^2+\varphi^2f^1)+g(\varphi^1\varphi^1f^0+2\varphi^0\varphi^1f^1)+\lambda f^0+\text{h. c.}]$. $\partial V/\partial f^i=\partial V/\partial f_i^*=0$ の条件より，$f^0=-(\lambda+g\varphi_1^*\varphi_1^*)\equiv f^0(\varphi)$，$f^1=-(m\varphi_2^*+2g\varphi_0^*\varphi_1^*)\equiv f^1(\varphi)$，$f^2=-m\varphi_1^*\equiv f^2(\varphi)$ と決まり，これを V に代入すれば，$V(\varphi)=\sum_{i=0}^{2}|f^i(\varphi)|^2\geqq 0$ となる。さらに $\partial V/\partial\varphi^2=\partial V/\partial\varphi_2^*=0$ を要求すれば，$f^1(\varphi)=0$ が出，$V(\varphi)=|\lambda+g\varphi_1{}^2|^2+m^2|\varphi_1|^2$ となる。これの φ^1,φ_1^* に関する停留点は，$\varphi^1=x$，または ix (x：実数) で，$x=0$ または $2(gx^2\pm\lambda)+m^2=0$ の根であるが，どの場合でも，$\lambda\neq 0$，$m^2\neq 0$ である限り $f^0=-(\lambda+g\varphi_1{}^2)\neq 0$ であり，超対称性は自発的に破れている。

5） $\langle 0|P_0|0\rangle=\langle 0|\{Q_\alpha,Q_\alpha^\dagger\}|0\rangle=2\|Q_\alpha|0\rangle\|^2$ であるから，正定値性を仮定する限り $\langle 0|P_0|0\rangle$ は正定値で，$\langle 0|P_0|0\rangle\begin{cases}=0\\\neq 0\end{cases}\Longleftrightarrow Q_\alpha|0\rangle\begin{cases}=0\\\neq 0\end{cases}$ の対応が成立するこ

とから，前半は明らか。後半は，たとえ $\langle 0|P_0|0\rangle \Big/ \int d^3x = c \neq 0$ でも，$P_\mu = \int d^3x\, T_\mu{}^0(x)$ のエネルギー・運動量テンソルのとり方がまずいだけで，$T_\mu{}^\rho(x) - c\delta_\mu^\rho$ を新たな $T_\mu{}^\rho(x)$ と定義すれば $\langle 0|P_0|0\rangle = 0$ となり，必ずしも並進不変性の自発的破れを意味しない。[テンソル・カレントだから，不変テンソル δ_μ^ρ が使えて定数項 $c\delta_\mu^\rho$ を付け加えられることに注意。]

6.3 6-3(7) の $\langle N(p_f)|A_\mu^a(x)|N(p_i)\rangle$ の場合は，初期状態の核子 $N(p_i)$ の Dirac スピノール $u(\boldsymbol{p}_i, s_i) \equiv u^{(i)}$，$U(n)_\mathrm{V}$ スピノール $\chi^{(i)}$，および終状態核子のそれ $\bar{u}(\boldsymbol{p}_f, s_f) \equiv \bar{u}^{(f)}$，$\chi^{(f)\dagger}$，さらに運動量 $q \equiv p_f - p_i$，$p \equiv p_f + p_i$ が，手持ちの共変量で，それらで Lorentz 擬ベクトルかつ $U(n)_\mathrm{V}$ 随伴表現である行列要素 M_μ^a をつくらねばならない。まず $U(n)_\mathrm{V}$ 部分に関しては明らかに $\chi^{(f)\dagger}T^a\chi^{(i)}$ である。次に Lorentz 変換性部分だが, Dirac スピノール $\bar{u}^{(f)}, u^{(i)}$ でつくられる独立量は $4\times 4 = 16$ 個で，それらは $\bar{u}^{(f)}(1, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_\mu\gamma_5, \sigma_{\mu\nu})u^{(i)}$ の $1+1+4+4+6=16$ 個で尽くされる。したがって，可能な擬ベクトル量は

$$\Gamma_\mu^1 \equiv q_\mu\,\bar{u}^{(f)}\gamma_5 u^{(i)}, \qquad \Gamma_\mu^2 \equiv p_\mu\,\bar{u}^{(f)}\gamma_5 u^{(i)}, \qquad \Gamma_\mu^3 \equiv \bar{u}^{(f)}\gamma_\mu\gamma_5 u^{(i)},$$

$$\Gamma_\mu^4 \equiv \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}q^\nu\bar{u}^{(f)}\sigma^{\rho\sigma}u^{(i)} = q^\nu\,\bar{u}^{(f)}\gamma_5\sigma_{\mu\nu}u^{(i)}, \qquad \Gamma_\mu^5 \equiv p^\nu\,\bar{u}^{(f)}\gamma_5\sigma_{\mu\nu}u^{(i)},$$

$$\Gamma_\mu^6 \equiv (p_\mu \text{ または } q_\mu)\,\bar{u}^{(f)}\not{q}\gamma_5 u^{(i)}, \qquad \Gamma_\mu^7 \equiv (p_\mu \text{ または } q_\mu)\,\bar{u}^{(f)}\not{p}\gamma_5 u^{(i)}$$

がすべてである。ところが，運動方程式 $\not{p}_i u^{(i)} = mu^{(i)}$ 等を使えば，$\Gamma_\mu^4 \sim \Gamma_\mu^7$ はすべて $\Gamma_\mu^{1,2,3}$ で書けることがわかる。したがって，一般には，$u^{(i)}\chi^{(i)} = u(p_i)$ 等と記して

$$\begin{aligned}&\langle N(p_f)|A_\mu^a(x)|N(p_i)\rangle \\ &\quad = e^{-iqx}\,\bar{u}(p_f)\,T^a[g_1(q^2)q_\mu\gamma_5 + g_2(q^2)p_\mu\gamma_5 + g_3(q^2)\gamma_\mu\gamma_5]\,u(p_i)\end{aligned}$$

を得る。$p_i^2 = p_f^2 = m_N^2$ であるから独立な Lorentz 不変変数は q^2 のみで，$g_1 \sim g_3$ は q^2 の関数である。ここで，軸性カレント A_μ^a の hermite 性から $\langle N(p_f)|A_\mu^a(x)|N(p_i)\rangle^* = \langle N(p_i)|A_\mu^a(x)|N(p_f)\rangle$ であり，さらに右辺は，$u(p_i) \leftrightarrow u(p_f)$ $(p_i \leftrightarrow p_f)$ の交換で元の過程の振幅 $\langle N(p_f)|A_\mu^a(x)|N(p_i)\rangle$ にならねばならない。この条件より，$\bar{u}(p_f)\,T^{a\dagger}[g_1^*\,\bar{\gamma}_5(-q_\mu) + g_2^*\,\bar{\gamma}_5 p_\mu + g_3^*\,\overline{\gamma_\mu\gamma_5}]\,u(p_i) = \bar{u}(p_f)\,T^a[g_1\gamma_5 q_\mu + g_2\gamma_5 p_\mu + g_3\gamma_\mu\gamma_5]\,u(p_i)$ $(\bar{\Gamma} \equiv \gamma_0\Gamma^\dagger\gamma_0)$，すなわち，$g_1, g_3$ が実，g_2 が純虚，が従う。ところが，$\mathcal{T}$ 不変性（または $C\mathcal{P}$ 不変性）を要求すれば，$\langle N(p_f)|A_\mu(0)|N(p_i)\rangle$ は

$$\langle N(p_f)|\,\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}A_\mu(0)\,\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}\,|N(p_i)\rangle = \langle \mathcal{T}N(p_f)|A^{\mu T}(0)|\mathcal{T}N(p_i)\rangle^* \qquad \Big(A_\mu \equiv \sum_a T^a A_\mu^a\Big)$$

に等しくなければならない。$|\mathcal{T}N(p_i)\rangle$ の波動関数が

$$\begin{aligned}\langle 0|\psi(0)|\mathcal{T}N(p_i)\rangle &= \langle 0|\,\mathcal{T}\mathcal{T}^{-1}\psi(0)\,\mathcal{T}\,|N(p_i)\rangle \\ &= \langle 0|-i\gamma^1\gamma^3\psi(0)|N(p_i)\rangle^* = i\gamma^1\gamma^3 u^*(p_i)\end{aligned}$$

となること等を用いて右辺を評価すれば，$g_1 \sim g_3$ がすべて実という条件が出，上の hermite 条件と考え合わせると，$g_2 = 0$ が結論される。

6-3(20), (28) の形も，同様に，もっと容易に導ける。

6.5 カイラルの場合の核子場（の線形基底）ψ は，$g = e^{i(\theta_\mathrm{V} + \gamma_5\theta_\mathrm{A})} \in G$ と書いたと

き，$\theta_V=0$ の純カイラル変換 g の下では $\psi^{\dagger\prime}=\psi^\dagger g^{-1}$ だが，$\bar\psi'=\psi^\dagger g^{-1}\gamma_0=\bar\psi g$ と変換する点に注意して，6-4 (43) に対応する式は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\bar\psi i\gamma^\mu\partial_\mu\psi-m\bar\psi\xi^{-2}(\pi)\psi+(1-g_A)\,\bar\psi\gamma^\mu\xi(\pi)\,\alpha_{\mu\perp}(\pi)\,\xi^{-1}(\pi)\,\psi\\&=\bar\chi i\gamma^\mu(\partial_\mu+i\alpha_{\mu/\!/}(\pi))\chi-m\bar\chi\chi-g_A\,\bar\chi\gamma^\mu\alpha_{\mu\perp}(\pi)\chi\end{aligned}$$

となる。ただし，$\xi(\pi)\equiv e^{i\gamma_5\pi/f_\pi}$ で，$\alpha_{\mu/\!/}, \alpha_{\mu\perp}$ は，それぞれ，$\alpha_\mu=i^{-1}\xi^{-1}(\pi)\,\partial_\mu\xi(\pi)$ の π について偶数次，奇数次の部分である。この場合，線形基底 ψ と非線形基底 χ の自由度が等しいので，どちらで量子化してもよい。線形基底 ψ で話をすれば，(軸性) カイラル変換で $\delta\psi=i\theta_A\gamma_5\psi$, $\delta\pi=f_\pi\theta_A+\cdots$ と変換するから，上の ψ で書かれた $\mathcal{L}$ から Noether の手続きで軸性カレント $j^a_{5\mu}$ をつくれば，$\alpha_{\mu\perp}(\pi)=\gamma_5\partial_\mu\pi/f_\pi+\cdots$ に注意し

$$\begin{aligned}j^a_{5\mu}&=\partial\mathcal{L}/\partial(\partial^\mu\psi)\cdot iT^a\gamma_5\psi+\partial\mathcal{L}/\partial(\partial^\mu\pi^a)\cdot(f_\pi+\cdots)\\&=\bar\psi i\gamma_\mu\cdot iT^a\gamma_5\psi+(1-g_A)\,\bar\psi\gamma_\mu\gamma_5T^af_\pi^{-1}\psi\cdot f_\pi+\cdots\\&=-g_A\,\bar\psi\gamma_\mu\gamma_5T^a\psi+\cdots\end{aligned}$$

と求まる。6-3 の軸性カレント A^a_μ は Noether カレントの逆符号，$A^a_\mu=-j^a_{5\mu}$ であったことに注意すれば，これより，この有効 Lagrangian $\mathcal{L}$ の tree レベルでの核子の軸性電荷が g_A であることがわかる。一方，上の $\mathcal{L}$ の質量項 $-m\bar\psi\xi^{-2}(\pi)\psi=-m\bar\psi(1-2i\gamma_5\pi f_\pi^{-1}+\cdots)\psi$ と，相互作用項 $(1-g_A)\,\bar\psi\gamma^\mu\xi\,\alpha_{\mu\perp}\xi^{-1}\psi=(1-g_A)\,\bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\pi f_\pi^{-1}\psi+\cdots$ より，核子の質量殻条件を用いて，$g_{\pi NN}=-2mf_\pi^{-1}+(1-g_A)2mf_\pi^{-1}=-2mg_A/f_\pi$ となり，Goldberger-Treiman 関係式を満たしている。(6-3 では f_π の定義も逆符号であった。) 非線形基底でも同様に話ができるのでやって見よ。

6.6 1-6 (14) の QED Lagrangian$+\mathcal{L}_{GF}$ より，Noether 手続きで

$$Q=\int d^3x\,j^{\rho=0}\,;\qquad j^\rho=-\bar\psi\gamma^\rho\psi,$$

$$Q_\mu=\int d^3x\,j_\mu{}^{\rho=0}\,;\qquad j_\mu{}^\rho=+x_\mu j^\rho-F_\mu{}^\rho+B\delta^\rho_\mu.$$

j^ρ は通常の電磁 $U(1)$ カレントで，ψ 以外の物質場があれば j^ρ にその寄与を加えるだけでこの $j_\mu{}^\rho$ の表式は常に成立する。

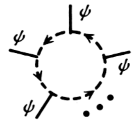
$\delta A_\nu=[i(a_\mu Q^\mu+bQ), A_\nu]=\partial_\nu\theta(x)=a_\nu$ より，$[iQ^\mu, A_\nu]=\delta_\nu{}^\mu$, $[iQ, A_\nu]=0$ が従い，特に前者より $\langle 0|[iQ^\mu, A_\nu(x)]|0\rangle=\delta^\mu{}_\nu\neq 0$ だから，Q^μ の対称性は常に自発的に破れている。これより，$A_\nu(x)$ には必ず零質量 NG ボソンが含まれることがいえるが，それは i) スカラー NG ボソン ϕ_{NG} で $A_\nu\sim\partial_\nu\phi_{NG}$ の形で含まれるか，ii) ベクトル NG ボソンか，の 2 通りがある。前者 i) になるのは Q が既に破れているときで，その場合 Q の $U(1)$ カレント j^ρ は NG ボソン (ϕ_{NG} の相棒) $\tilde\phi_{NG}$ を $j^\rho\sim\partial^\rho\tilde\phi_{NG}$ の形で含むから，Q_μ のカレント $j_\mu{}^\rho=x_\mu j^\rho+\cdots$ は必ず $\tilde\phi_{NG}$ を

$$j_\mu{}^\rho\sim(x_\mu\partial^\rho-\delta_\mu{}^\rho)\,\tilde\phi_{NG}$$

の形で含み (保存則 $\partial_\rho j_\mu{}^\rho=0$ を考慮)，この形で実際 $[iQ_\mu, A^\nu]\sim\int d^3x[ij^{\rho=0}_\mu(x), \partial^\nu\phi_{NG}]=\delta^\nu_\mu$ を満たせることがいえる。このようなスカラー NG ボソンがないときは，$A_\nu(x)$ 中の零質量粒子はベクトル NG ボソンでなければならず，後者 ii) の場合に相当する。したがって，A_ν 中の零質量ベクトル粒子＝光子 は，Q_μ の自

発的破れに対応する NG ベクトルボソンである。より詳しい議論，および重力場への拡張は T. Kugo, H. Terao and S. Uehara, Prog. Theor. Phys. Supplement No. 85 (1985) 122 を見よ。(古い文献もそこに掲げてある。) この話は，**6-5** の Higgs 模型で，$\mu^2 \gtrless 0$ の場合に具体的に見てみるとわかりやすいので各自やってみられたい。

6.7 $\alpha \to \infty$ で唯一残るグラフは，右に示すような，$ie\alpha M\,\bar{c}\,\psi c$ 相互作用項を用いた FP ゴースト 1-loop グラフである。$\alpha \to \infty$ ではゴースト伝播関数が $i/(\alpha M^2 - k^2) \to i/\alpha M^2$ となるから，その有効作用 Γ への寄与は，



$$\begin{aligned}\Gamma &= \lim_{\alpha\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)\int\frac{d^4 l}{i(2\pi)^4}\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{d^4 k_j}{(2\pi)^4}\left(\frac{i}{\alpha M^2}ie\alpha M\,\psi(k_j)\right)\right](2\pi)^4\,\delta^4(\sum_i k_i)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)i^{-1}\,\delta^4(x=0)\int d^4 x\,(-e\psi(x)/M)^n\\ &= -i\delta^4(0)\int d^4 x\,\ln(1+e\psi(x)/M)\end{aligned}$$

と求まる。$M=ev$ を代入すれば定数項を除き，$-i\delta^4(0)\ln(v+\psi(x))$ だけ Lagrangian に効く。後半は，**5-3** (34) ～ (45) と同様 $\Delta^{-1} \equiv \int \mathcal{D}\theta\,\delta(\chi^\theta)$ を $\chi^\theta = \chi + e\theta(v+\psi) + O(\theta^2)$ を用いて評価すれば，$\delta(\chi)$ の前では $\Delta = \mathrm{Det}[e(v+\psi(x))] = \exp\left[\delta^4(0)\int d^4 x\,\ln(v+\psi(x)) + \ln e\right]$ が出る。

6.8 $0 = \int \mathcal{D}\phi \dfrac{\delta}{\delta \bar{c}^a(x)}[g(A_\nu \times \bar{c})^b(y)\,e^{iS[\phi]}] = \int \mathcal{D}\phi[-\partial^\mu D_\mu c^a(x)\,g(A_\nu \times \bar{c})^b(y) + gf^{abc}A_\nu^c(y)\,\delta^4(x-y)]\,e^{iS[\phi]}$ より $\langle 0|\mathrm{T}\,\partial^\mu D_\mu c^a(x)\,g(A_\nu\times\bar{c})^b(y)|0\rangle = gf^{abc}\delta^4(x-y)\langle 0|A_\nu^c(y)|0\rangle$ が従うが，Lorentz 不変性より，$\langle 0|A_\nu^c|0\rangle = 0$.

6.9 **2-4** (8), (11) より $C\mathcal{P}\,W^\mu(\boldsymbol{x},t)\,\mathcal{P}^{-1}C^{-1} = -W_\mu^\dagger(-\boldsymbol{x},t)$. **2-4** (1), (10) より $C\mathcal{P}\,q(\boldsymbol{x},t)\,\mathcal{P}^{-1}C^{-1} = \gamma_0 C\bar{q}^T(-\boldsymbol{x},t)$. よって $C\mathcal{P}\,\bar{q}_F\gamma_\mu(1-\gamma_5)q_f(\boldsymbol{x},t)\,\mathcal{P}^{-1}C^{-1} = q_F^T\gamma_0 C^\dagger\gamma_\mu(1-\gamma_5)\gamma_0 C\bar{q}_f^T(-\boldsymbol{x},t) = -\bar{q}_f\gamma_0(1-\gamma_5)\gamma_\mu\gamma_0 q_F(-\boldsymbol{x},t) = -\bar{q}_f\gamma^\mu(1-\gamma_5)q_F(-\boldsymbol{x},t)$. したがって，**6-7** (69) の第 1 項の $C\mathcal{P}$ 変換は $W_\mu^\dagger\,\bar{q}_f\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,U_{Ff}\,q_F(-\boldsymbol{x},t)$ で，一方，第 2 項 h. c. の $-\boldsymbol{x}$ における量は $W_\mu^\dagger\,\bar{q}_f\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,U_{Ff}^*\,q_F(-\boldsymbol{x},t)$ であるから，U_{Ff} が実でないと $C\mathcal{P}$ が破れる。

6.10 **5-7** (18) の WT 恒等式は $\psi_i, \bar{\psi}_i$ の斉次式であるから，$\psi_i, \bar{\psi}_i$ はくりこまれた Heisenberg 場としてよい。さらに B は F.T.$\langle 0|\mathrm{T}\,B(x)A_\mu(y)|0\rangle = k_\mu/k^2$ のみを 0 でない連結 Green 関数として持つことより，$A_\mu = Z_3^{1/2}A_\mu^{\mathrm{ren}}$ に注意すれば，**5-17** (18) 左辺は $S_F'(p-k)\,i\Gamma_{\mu i}^{\mathrm{ren}}\,S_F'(p)(-iZ_3^{-1/2}k^\mu/k^2)$ となる。S_F' は F.T.$\langle 0|\psi_i(x)\,\bar{\psi}_i(y)|0\rangle$ で，$\Gamma_\mu^{\mathrm{ren}}$ は光子と $\psi_i, \bar{\psi}_i$ とのくりこまれた頂点関数である。一方，**5-17** (18) 右辺は，ゴーストが自由場で F.T.$\langle 0|\mathrm{T}\,c(x)\,\bar{c}(y)|0\rangle = -1/k^2$ であるから，$ie^0 q_i[S_F'(p) - S_F'(p-k)](-1/k^2)$ となる。よって両辺を比べれば，

$$iZ_3^{-1/2}k^\mu\,\Gamma_{\mu i}^{\mathrm{ren}} = e^0 q_i[S_F'^{-1}(p-k) - S_F'^{-1}(p)]$$

を得る。ψ_i と光子の質量殻近傍で考えれば，$S_F'^{-1}(p) \simeq i(m - \not{p})$ であり，$\Gamma_{\mu i}^{\mathrm{ren}}$ は質量殻上光子の結合定数 e_i を用いて $\simeq e_i\gamma_\mu$ であるから，これは望みの関係式 e_i

$=Z_3^{1/2}e^0 q_i$ を与える。

演習問題 7.

7.1 2) $J^\mu_{fi}(x)\equiv\langle l(p_f)|j^\mu(x)|l(p_i)\rangle$ とすれば相互作用エネルギー $E_{\rm int}$ は

$$E_{\rm int}=-e\int d^3x\,\frac{1}{2}(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{J}_{fi}(0)e^{iqx}=-\frac{i}{2}e\left[\boldsymbol{H}\times\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{q}}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{q})\right]\cdot\boldsymbol{J}_{fi}(0)$$

$$\xrightarrow[\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_f\to 0]{}\frac{i}{2}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0})\,e\boldsymbol{H}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{q}}\times\boldsymbol{J}_{fi}(0)\right]_{\boldsymbol{q}=0}.$$

ただし，$\delta'(x)f(x)=-\delta(x)f'(x)+\delta'(x)f(0)\xrightarrow[x\to 0]{}-\delta(0)f'(0)$ を使った。ここで $[(\partial/\partial\boldsymbol{q})\times\boldsymbol{J}_{fi}(0)]_{\boldsymbol{q}=0}$ を，レプトンの静止系 $\boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{p}_f=\boldsymbol{q}\to\boldsymbol{0}$ で，Dirac 波動関数の標準表示の表式，付録 A(21)，を用いて評価すると，(q^2 や $q_0=m-\sqrt{\boldsymbol{q}^2+m^2}$ の $\boldsymbol{q}$ 微分は効かないことに注意して)

$$\left[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{q}}\times\boldsymbol{J}_{fi}(0)\right]_{\boldsymbol{q}=0}=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{q}}\times\left\{-\sqrt{2m}\,\chi^\dagger\left(1,-\frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2m}\right)\left[\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{\sigma}\\-\boldsymbol{\sigma}&0\end{pmatrix}F_1(0)\right.\right.$$

$$\left.\left.+i\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{q}&0\\0&\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{q}\end{pmatrix}\frac{F_2(0)}{2m}\right]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sqrt{2m}\,\chi\right\}_{\boldsymbol{q}=0}$$

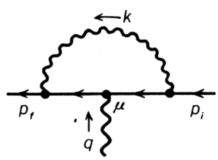
$$=-2i\chi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\chi(F_1(0)+F_2(0)).$$

$\chi^\dagger(\boldsymbol{\sigma}/2)\chi\equiv\boldsymbol{S}$ はレプトンのスピンであり，1) より $F_1(0)=1$ であるから

$$E_{\rm int}=(1+F_2(0))\frac{e}{2m}2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}(2\pi)^3 2m\delta^3(\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}).$$

静止状態は $\langle l(\boldsymbol{p}=0)|l(\boldsymbol{p}=0)\rangle=(2\pi)^3 2m\delta^3(\boldsymbol{0})$ と規格化されているから，これは，レプトン 1 個当り，$\boldsymbol{\mu}=(-e/2m)2\boldsymbol{S}(1+F_2(0))$ の磁気能率を持つことを示している。第 1 項 $(-e/2m)2\boldsymbol{S}$ はよく知られた Dirac 磁気能率で，第 2 項 $(-e/2m)F_2(0)2\boldsymbol{S}$ は量子補正により初めて現れる寄与で異常磁気能率と呼ばれる。

3) μ に寄与する e の 3 次のグラフは右図で与えられ，



$$\Gamma=\int\frac{d^4k}{i(2\pi)^4}\bar{u}(p_f)e\gamma_\nu\frac{1}{m-\not{p}_f+\not{k}}e\gamma^\mu$$

$$\times\frac{1}{m-\not{p}_i+\not{k}}e\gamma_\rho u(p_i)\frac{-g^{\nu\rho}}{(-k^2)}A^{\rm ext}_\mu(q).$$

(これは有効作用への寄与である。) 付録 (C.2) の Feynman パラメータ公式を使って分母をくっつけ，$p_i{}^2=p_f{}^2=m^2$ を用いれば

$$\Gamma=e^2\int\frac{d^nk}{i(2\pi)^n}\int_0^1 2ydydx$$

$$\frac{\bar{u}(p_f)\gamma_\nu(m+\not{p}_f-\not{k})\gamma^\mu(m+\not{p}_i-\not{k})\gamma^\nu u(p_i)}{[2yk\cdot(xp_f+(1-x)p_i)-k^2]^3}(-eA^{\rm ext}_\mu(q))$$

分子を $u(p)$ の運動方程式および付録 B の公式 (29),(30) を用いて整理する。我々は，$\bar{u}(p_f)(\gamma^\mu F_1+i\sigma^{\mu\nu}q_\nu F_2/2m)u(p_i)$ の $F_2(q^2=0)$ のみ欲しいので，γ^μ になる部分は捨てて

分子$=\bar{u}(p_f)[+2(\gamma^\mu \not{p}_f \not{k}+\not{k}\not{p}_i\gamma^\mu)+2(2-n)k^\mu \not{k}+(\gamma^\mu\text{項})]u(p_i)$.

公式 (C.8), (C.9) を用いて d^nk 積分を行う。そうすれば，再び γ^μ 項を無視すると，分子の k はすべて $y(xp_f+(1-x)p_i)$ に置き換わり，$n=4$ での発散はない。分母の q^2 は 0 にし，$p_i{}^2=p_f{}^2=m^2$ および運動方程式を用いて，

$$\Gamma=\frac{\Gamma(1)e^2}{(4\pi)^2\Gamma(3)}\int_0^1 2ydydx$$
$$\frac{\bar{u}(p_f)[4my((1-x)p_f^\mu+xp_i{}^\mu)-4my^2(xp_f^\mu+(1-x)p_i{}^\mu)]u(p_i)}{m^2y^2}(-eA_\mu^{\text{ext}}(q))$$
$$=\frac{e^2}{(4\pi)^2 m}\bar{u}(p_f)(p_f^\mu+p_i{}^\mu)u(p_i)(-eA_\mu^{\text{ext}}(q)).$$

ここで Gordon 恒等式 (A.24) を用い，γ^μ 項を落とせば $\bar{u}(p_f)(p_f+p_i)^\mu u(p_i)$ は $-\bar{u}(p_f)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu u(p_i)$ に等しいから，この結果は

$$F_2(0)=\frac{e^2}{8\pi^2}=\frac{\alpha}{2\pi}\qquad\left(\alpha=\frac{e^2}{4\pi}\simeq\frac{1}{137}\right)$$

を示している。

7.2 演習問題 5.1 と同様にして $\mathcal{L}_F\equiv\frac{\delta F}{\delta Q_A}\frac{\delta}{\delta P_A}+(-)^{|F|}\frac{\delta F}{\delta P_A}\frac{\delta}{\delta Q_A}$ を定義すれば $F*G=\mathcal{L}_F G$ と書け，Grassmann 性が $|F_1|\equiv|F|+1$ で与えられる graded 交換関係 $[\mathcal{L}_F,\mathcal{L}_G]\equiv\mathcal{L}_F\mathcal{L}_G-(-)^{|F_1||G_1|}\mathcal{L}_G\mathcal{L}_F$ で閉じた 1 階微分演算子代数をなす。このことから Jacobi 恒等式 **7-4** (31) は明らか。

$\frac{1}{2}\tilde{S}*\tilde{S}=\left(\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_I}\frac{\delta}{\delta\phi_I}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_c}\frac{\delta}{\delta c}\right)\tilde{S}=\left((\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\phi_I)\frac{\delta}{\delta\phi_I}+(\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}c)\frac{\delta}{\delta c}\right)\tilde{S}$ と書けるから，$\tilde{S}*\tilde{S}=0$ は $\tilde{S}$ の BRS 不変性から明らか。したがって Jacobi 恒等式より $\tilde{S}*(\tilde{S}*{}^\forall X)=-\frac{1}{2}X*(\tilde{S}*\tilde{S})=0$ を得る。

7.3 **7-5** (22) の作用積分を $I[\phi,K,M]$ とすれば，連結 Green 関数の生成汎関数 $W[J,K,M]$ は

$$e^{iW[J,K,M]}=\int\mathcal{D}\phi\, e^{i(I[\phi,K,M]+J\cdot\phi)}.\qquad\left[J\cdot\phi\equiv\int d^4x(J_I\phi_I+\bar{J}_c c+J_{\bar{c}}\bar{c}+J_{\mathrm{B}}B)\right]$$

これに BRS 変換と同じ形の積分変数変換を行えば，$(1/2)m^2A_\mu^2$ と $J\cdot\phi$ のみが BRS 不変でないから

$$0=\int\mathcal{D}\phi\, i\left[m^2\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\left(\frac{1}{2}A_\mu^2\right)+J_I\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\phi_I-\bar{J}_c\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}c-J_{\bar{c}}iB\right]e^{i(I+J\cdot\phi)}$$
$$=\left(m^2\frac{\delta}{\delta M}+J_I\frac{\delta}{\delta K_I}-\bar{J}_c\frac{\delta}{\delta K_c}-iJ_{\bar{c}}\frac{\delta}{\delta J_B}\right)e^{iW[J,K,M]}$$

を得る。これに **5-6** (9), (10) を適用すればただちに **7-5** (24) を得る。

7.4 **7-4** (20) の結合定数くりこみ $g_0=Z_1Z_3^{-3/2}g$ (と波動関数くりこみ) のみで理論が有限になることを **7-4** で示したから，それを代入すれば

$$Z_4=(Z_1Z_3^{-3/2})^2Z_3^2=Z_1^2=Z_3^{-1},\qquad\tilde{Z}_1=(Z_1Z_3^{-3/2})Z_3^{1/2}\tilde{Z}_3=Z_1Z_3^{-1}\tilde{Z}_3,$$
$$Z_1^\phi=(Z_1Z_3^{-3/2})Z_3^{1/2}Z_2=Z_1Z_3^{-1}Z_2,$$

が得られる。

演習問題 8.

8.1 問題に与えられているくりこみ関係式 $\Gamma=\Gamma_0$ の右辺は μ に依存しないから $\mu\partial/\partial\mu\Gamma=0$ (微分は $n, \phi_0, m_0, \lambda_0$ 固定微分)。これが望みの斉次 RGE を与える。$\beta(\lambda)\equiv\mu(\partial\lambda/\partial\mu)$ の表式は，$\lambda_0=Z_\lambda\lambda\mu^{4-n}$ の対数の両辺を $\mu\partial/\partial\mu$ 微分して

$$0=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_\lambda+\frac{1}{\lambda}\mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}+(4-n)=\beta(\lambda)\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln Z_\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)+(4-n),$$

$$\beta(\lambda)=\frac{(n-4)\lambda}{\left(1+\lambda\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\ln Z_\lambda\right)}=\frac{-2\varepsilon\lambda}{1+\lambda a_\lambda^{(1)\prime}/\varepsilon+O(\varepsilon^{-2})}=-2\varepsilon\lambda+2\lambda^2a_\lambda^{(1)\prime}+O(\varepsilon^{-1})$$

となる。ところが，RGE は $n\to4$ で有限であるから $\beta(\lambda)$ も有限であり，$O(\varepsilon^{-1})$ 項はすべて 0 でなければならず (このことから $a_\lambda^{(i)}(\lambda)$ 間の恒等式が導かれる)，したがって $\varepsilon\to0$ 極限で $\beta(\lambda)=2\lambda^2a_\lambda^{(1)\prime}$ を得る。$\beta(\lambda)=-2\varepsilon\lambda+2\lambda^2a_\lambda^{(1)\prime}$ を使えば，例えば γ_m は

$$\gamma_m(\lambda)=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_m=\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln Z_m$$
$$=(-2\varepsilon\lambda+2\lambda^2a_\lambda^{(1)\prime})(a_m^{(1)\prime}/\varepsilon+O(\varepsilon^{-2}))=-2\lambda a_m^{(1)\prime}+O(\varepsilon^{-1})$$

で，再び $O(\varepsilon^{-1})$ 項は 0 でなければならず，$\gamma_m(\lambda)=-2\lambda a_m^{(1)\prime}$ が得られる。$\gamma(\lambda)$ も同様。

8.2 $\Gamma^{(2)}, (\partial/\partial p^2)\Gamma^{(2)}, \Gamma^{(4)}$ に対する CS 方程式 8-2 (25) で $\boldsymbol{p}=0$ とおいた式より

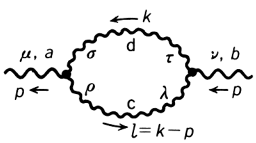
$$1+\gamma(\lambda)=\alpha(\lambda),\qquad \gamma(\lambda)=m^2\alpha(\lambda)(\partial\Gamma_\theta^{(2)}/\partial p^2)_{p^2=0},$$
$$\beta(\lambda)-4\gamma(\lambda)\lambda=2m^2\alpha(\lambda)\Gamma_\theta^{(4)}(\boldsymbol{p}=0).$$

これを α,β,γ について解けばよい。

8.3 次元正則化法で計算するのが最も容易。以下の計算に必要な 1-loop グラフの発散部分 $\propto\varepsilon^{-1}\equiv2/(4-n)$ は，次のタイプのみである：

$$\int_{\rm div}(1,\ k_\mu,\ k_\mu k_\nu)\frac{1}{k^4}=\frac{1}{16\pi^2}\varepsilon^{-1}(1,\ 0,\ 0),$$
$$\int_{\rm div}(1,\ k_\mu,\ k_\mu k_\nu)\frac{1}{k^2l^2}=\frac{1}{16\pi^2}\varepsilon^{-1}\left(1,\ \frac{1}{2}p_\mu,\ \frac{1}{3}p_\mu p_\nu-\frac{1}{12}g_{\mu\nu}p^2\right),$$
$$\int_{\rm div}(k_\mu k_\nu\ \text{ or }\ k_\mu l_\nu\ \text{ or }\ l_\mu l_\nu)\frac{1}{k^4l^2}=\int_{\rm div}\frac{1}{4}g_{\mu\nu}\frac{1}{k^4}=\frac{1}{16\pi^2}\varepsilon^{-1}\frac{1}{4}g_{\mu\nu}$$

ただし $\int\equiv\int d^nk/i(2\pi)^n$, $l\equiv k-p$, であり，添字 div は発散部分を表す。これらの公式は，Feynman パラメータ公式，付録 C(1) と，次元正則化積分公式，付録 C(7) ～ (9) からすぐ出せる。



まずゲージ場自己エネルギーの 8·10 図 (a) のグラフは，運動量，添字を右図のようにとって

$$8\cdot 10\,図\,(a)=\frac{1}{2}\int igf_{acd}V_{\mu\rho\sigma}(p,l,-k)\frac{[\mathcal{P}(k)+\alpha\mathcal{L}(k)]^{\sigma\tau}}{k^2}\times igf_{dcb}V_{\tau\lambda\nu}(k,-l,-p)\frac{[\mathcal{P}(l)+\alpha\mathcal{L}(l)]^{\lambda\rho}}{l^2}.$$

ただし，ここで次の記号を導入した：

$$V_{\mu\nu\rho}(k,p,q)\equiv g_{\mu\nu}(k-p)_\rho+g_{\nu\rho}(p-q)_\mu+g_{\rho\mu}(q-k)_\nu,$$
$$\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)\equiv g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2},\qquad \mathcal{L}_{\mu\nu}(k)\equiv\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}.$$

ゲージ場頂点因子 $V_{\mu\nu\rho}$ の満たす次の恒等式 (本質的に WT 恒等式)

$$q^\rho V_{\mu\nu\rho}(k,p,q)=p^2\mathcal{P}_{\mu\nu}(p)-k^2\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)$$

を，上の表式の $V_{\mu\rho\sigma}\cdot(\alpha-1)k^\sigma k^\tau/k^4\cdot V_{\tau\lambda\nu}$ 部分に適用してやれば

$$8\cdot 10\,図\,(a)=\frac{g^2}{2}C_2(G)\delta_{ab}\int\left\{\mathrm{tr}\left[V_\mu\frac{1}{k^2}V_\nu\frac{1}{l^2}\right]+(\alpha-1)\frac{1}{k^4}\left[(p^2\mathcal{P}(p)-l^2\mathcal{P}(l))\times\frac{\mathcal{P}(l)+\alpha\mathcal{L}(l)}{l^2}(p^2\mathcal{P}(p)-l^2\mathcal{P}(l))\right]_{\mu\nu}\right\}$$

($((V_\mu)_{\rho\sigma}=V_{\mu\rho\sigma}$, $(\mathcal{P})_{\mu\nu}=\mathcal{P}_{\mu\nu}$ の行列表示を使っている。) 第 2 項で $p^2\mathcal{P}(p)$ を 2 回使う項は収束しているから落とせて，また $\mathcal{P}\mathcal{P}=\mathcal{P}$, $\mathcal{P}\mathcal{L}=0$ を用いれば，第 2 項は

$$\int(\alpha-1)\frac{1}{k^4}[\cdots]=(\alpha-1)\int\frac{1}{k^4}\left\{-p^2[\mathcal{P}(p)\mathcal{P}(l)+\mathcal{P}(l)\mathcal{P}(p)]_{\mu\nu}+l^2\mathcal{P}_{\mu\nu}(l)\right\}$$

と簡単化される。第 1 項 (Feynman ゲージの場合の項) の発散部分は，初めに与えた公式を用いて簡単に評価できる。

$$\int_{\mathrm{div}}\mathrm{tr}(V_\mu V_\nu)\frac{1}{k^2l^2}$$
$$=\int_{\mathrm{div}}\left\{g_{\mu\nu}(2k^2-2k\cdot p+5p^2)+10k_\mu k_\nu-5(k_\mu p_\nu+p_\mu k_\nu)-2p_\mu p_\nu\right\}\frac{1}{k^2l^2}$$
$$=\frac{1}{16\pi^2}\varepsilon^{-1}\left[\frac{19}{6}g_{\mu\nu}p^2-\frac{11}{3}p_\mu p_\nu\right]$$

簡単化した第 2 項の表式にも公式を適用すればただちに

$$\int_{\mathrm{div}}(\alpha-1)\frac{1}{k^4}[\cdots]=\frac{1}{16\pi^2}\varepsilon^{-1}(\alpha-1)(-1)(g_{\mu\nu}p^2-p_\mu p_\nu).$$

よって

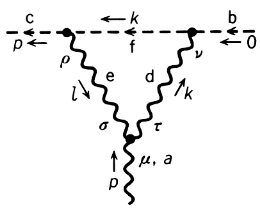
$$8\cdot 10\,図\,(a)=\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}C_2(G)\delta_{ab}\left[\frac{19}{12}g_{\mu\nu}p^2-\frac{11}{6}p_\mu p_\nu+\frac{1}{2}(1-\alpha)(g_{\mu\nu}p^2-p_\mu p_\nu)\right].$$

次に 8·10 図 (b) のグラフは，loop 積分が外線運動量に依存せず $\int k_\mu k_\nu/k^4=(g_{\mu\nu}/n)\int 1/k^2$ のタイプのみの積分となって 0 となる。他の 8·10 図 (c), (d) や 8·11 図，8·12 図のグラフは簡単で次のように評価される (有限部分は落とす)：

$$8\cdot 10\,\text{図}\,(\text{c}) = -\int g f_{adc}\, l_\mu \frac{1}{il^2} g f_{bcd}\, k_\nu \frac{1}{ik^2}$$
$$= -g^2 C_2(G)\,\delta_{ab} \int \frac{l_\mu k_\nu}{l^2 k^2}$$
$$= \frac{g^2}{16\pi^2}\varepsilon^{-1} C_2(G)\,\delta_{ab}\left[\frac{1}{6}p_\mu p_\nu + \frac{1}{12}g_{\mu\nu}p^2\right]$$
$$8\cdot 10\,\text{図}\,(\text{d}) = -\int \mathrm{tr}\left(gT^a\gamma_\mu \frac{1}{-\not{k}} gT^b\gamma_\nu \frac{1}{-\not{l}}\right)$$
$$= -g^2 T(R)\,\delta_{ab}\int 2^{n/2}(k_\mu l_\nu - g_{\mu\nu}k\cdot l + k_\nu l_\mu)\frac{1}{k^2 l^2}$$
$$= \frac{g^2}{16\pi^2}\varepsilon^{-1} T(R)\,\delta_{ab}\left[-\frac{4}{3}(g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu)\right].$$
$$8\cdot 11\,\text{図} = \int g f_{dca}\, p_\mu \frac{1}{il^2} g f_{dbc}(-l_\nu)\frac{g_{\mu\nu}-(1-\alpha)k_\mu k_\nu/k^2}{k^2}$$
$$= -iC_2(G)\,\delta_{ab}\int\left(p\cdot l - (1-\alpha)\frac{p\cdot k\, k\cdot l}{k^2}\right)\frac{1}{k^2 l^2}$$
$$= \frac{g^2}{16\pi^2}\varepsilon^{-1} C_2(G)\,\delta_{ab}\left[\frac{1}{2}+\frac{\alpha-1}{4}\right]ip^2$$
$$8\cdot 12\,\text{図} = \int gT^a\gamma^\mu \frac{1}{\not{l}} gT^a\gamma^\nu \frac{g_{\mu\nu}-(1-\alpha)k_\mu k_\nu/k^2}{k^2}$$
$$= g^2 C_2(R)\int\left\{\frac{(2-n)\not{l}}{k^2 l^2} - \frac{(1-\alpha)}{k^4}(\not{l}+\not{p})\frac{1}{\not{l}}(\not{l}+\not{p})\right\}$$
$$= \frac{g^2}{16\pi^2}\varepsilon^{-1} C_2(R)\,\alpha\not{p}.$$

ただし，8·12 図の表式では $\not{p}(1/\not{l})\not{p}$ の項は収束しているので落としたことに注意。

最後に 8·13 図の二つのグラフを評価する。このグラフの発散部分は，$\varepsilon^{-1} f_{abc}p_\mu$ (p_μ は反ゴーストの運動量) の形であるから，初めからゴースト側の外線運動量を 0 とおいて評価してよい。そうすれば，まず，8·13 図 (a) のグラフは，右図のように運動量，添字をとって，



$$8\cdot 13\,\text{図}\,(\text{a}) = \int g f_{efc}\, p_\rho \frac{1}{ik^2} g f_{dbf}\, k_\nu$$
$$\times \frac{[\mathcal{P}(l)+\alpha\mathcal{L}(l)]^{\rho\sigma}}{l^2}\, igf_{aed}\, V_{\mu\sigma\tau}(-p,-l,k)\frac{[\mathcal{P}(k)+\alpha\mathcal{L}(k)]^{\tau\nu}}{k^2}.$$

ゴースト外線運動量を 0 においたために $k_\nu[\mathcal{P}(k)+\alpha\mathcal{L}(k)]^{\tau\nu} = \alpha k^\tau$ が使えることに注意する。さらにここで，この量に p^μ を掛け縮約をとれば，上でも使った頂点関数 $V_{\mu\sigma\tau}$ の恒等式を用いることができて評価がずっとやさしくなる：

$$p^\mu \times [8\cdot 13\,\text{図}\,(\text{a})]$$
$$= g^3 f_{efc} f_{dbf} f_{aed} \int p_\rho [\mathcal{P}(l) + \alpha \mathcal{L}(l)]^{\rho\sigma} [l^2 \mathcal{P}(l) - k^2 \mathcal{P}(k)]_{\sigma\tau} \alpha k^\tau \frac{1}{k^4 l^2}$$
$$= \frac{g^3}{2} C_2(G) f_{abc} \alpha \int p^\rho \mathcal{P}_{\rho\tau}(l) k^\tau \frac{1}{k^4}.$$

ただし，$\mathcal{P}_{\sigma\tau}(k) k^\tau = 0$，$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$，$\mathcal{P}\mathcal{L} = 0$ を使った。また群の因子は，**5-1** (10) の随伴表現行列 $(T_a)_{bc} \equiv i f_{bac}$ を用いて次のように評価した：

$$f_{efc} f_{dbf} f_{aed} = -f_{aed} (T_e T_d)_{cb} = \frac{1}{2} f_{aed} [T_d, T_e]_{cb}$$
$$= \frac{1}{2} f_{aed}\, i f_{def} (T_f)_{cb} = -\frac{i}{2} C_2(G) \delta_{af} (T_f)_{cb}$$
$$= \frac{1}{2} C_2(G) f_{abc}.$$

$l\cdot k / l^2 = 1 + l\cdot p / l^2$ として，初めの公式を使えば

$$p^\mu \times [8\cdot 13\,\text{図}\,(\text{a})] = \frac{g^3}{16\pi^2} \varepsilon^{-1} C_2(G) f_{abc} \frac{3}{8} \alpha p^2$$

となる。8·13 図 (a) 自身は p^2 を p_μ に置き換えればよい。同様に 8·13 図 (b) も，ゴースト側の外線運動量を 0 にとり，p^μ との縮約をとって

$$p^\mu \times [8\cdot 13\,\text{図}\,(\text{b})] = \int g f_{fec} p^\rho \frac{1}{il^2} g f_{ade} (-l\cdot p) \frac{1}{ik^2} g f_{fbd} (-k_\nu) \frac{[\mathcal{P}(k) + \alpha \mathcal{L}(k)]_{\rho\nu}}{k^2}$$
$$= \frac{g^3}{2} C_2(G) f_{abc} \int \frac{\alpha\, k\cdot p\; l\cdot p}{k^4 l^2}$$
$$= \frac{g^3}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} C_2(G) f_{abc} \frac{\alpha}{8} p^2$$

よって (8·13 図)$=(g^2/32\pi^2)\varepsilon^{-1} \alpha C_2(G) g f_{abc} p_\mu$ を得る。

8.4 1) 演算問題 6.10 と同様にやるか，または 3 点関数の発散 ∂^μ をとり，運動方程式 $\partial^\mu A_{0\mu} = -\alpha_0 B_0$ を代入し，WT 恒等式 **5-7** (18) を用いる。2 点関数のくりこみ条件および $Z_3 \alpha = \alpha_0$ に注意すればすぐ導ける。

2) **3-1** のスカラー場のスペクトル表示の導出法と同じ。ただし

$$(2\pi)^3 \sum_n \delta^4(p_n - q) \langle 0 | F_{\mu\nu}(0) | n \rangle \langle n | F_{\rho\sigma}(0) | 0 \rangle \equiv \rho_{\mu\nu,\,\rho\sigma}(q)$$

が問題文中に与えた形になるのは，$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_{0\nu} - \partial_\nu A_{0\mu}$ の形から，$\langle 0 | F_{\mu\nu}(0) | n \rangle$ が必ず $p_{n\mu}$ または $p_{n\nu}$ の因子を持つことおよび $(\mu\nu)$, $(\rho\sigma)$ 反対称性，Lorentz 不変性から従う。

3) 上で中間状態を $|n\rangle\langle n|$ の対角正定値型にしたのは，QED の場合，$F_{\mu\nu}$ は BRS 不変な演算子で物理的状態しか中間状態に効かないからである。$\rho_{01,01}(q)$ 成分を見れば，左辺 $\propto |\langle 0 | F_{01}(0) | n \rangle|^2$ で，右辺が $\rho(q^2)(q_0^2 - q_1^2)$ となるが，スペクトル条件より $q_0^2 \geq \boldsymbol{q}^2 \geq q_1^2$ だから $\rho(q^2) \geq 0$ が従う。

問題に与えた光子の 2 点関数の定義式を用いれば

$$\int d^4x\, e^{ipx} \langle 0 | \mathrm{T}\, F_{\mu\nu}(x) F_{\rho\sigma}(0) | 0 \rangle$$
$$= -iZ_3 (g_{\mu\rho} p_\nu p_\sigma - g_{\nu\rho} p_\mu p_\sigma - g_{\mu\sigma} p_\nu p_\rho + g_{\nu\sigma} p_\mu p_\rho) \pi(p^2) / p^2$$

を得る。[ここでT積はT^*積の意味であり，$\partial_\mu^x\partial_\rho^y\langle 0|\mathrm{T}\,A_\nu(x)A_\sigma(y)|0\rangle=\langle 0|\mathrm{T}\,\partial_\mu A_\nu(x)\,\partial_\rho A_\sigma(y)|0\rangle$のように自由に微分できることを用いた。] 一方，上で得た$F_{\mu\nu}$の交換子のスペクトル表示は，$i\Delta(x\,;\,s)\to\Delta_F(x\,;\,s)$の置き換えをすれば，$F_{\mu\nu}$のT積に対するスペクトル表示を与える：

$$\int d^4x\,e^{ipx}\langle 0|\mathrm{T}\,F_{\mu\nu}(x)F_{\rho\sigma}(0)|0\rangle$$
$$=i(g_{\mu\rho}\,p_\nu\,p_\sigma-g_{\nu\rho}\,p_\mu\,p_\sigma-g_{\mu\sigma}\,p_\nu\,p_\rho+g_{\nu\sigma}\,p_\mu\,p_\rho)\int ds\,\frac{\rho(s)}{s-p^2}.$$

これを上式と等置し，$p^2=-\mu^2$と置き，くりこみ条件$\pi(-\mu^2)=1$を用いれば

$$\frac{Z_3}{\mu^2}=\int ds\,\frac{\rho(s)}{s+\mu^2}$$

なる望みの等式が得られる。

4） Z_3の表式$Z_3=Z_3^{\text{on-shell}}+\int ds\,\dfrac{\sigma(s)}{1+s/\mu^2}$と$\sigma(s)\geqq 0$より，明らかに$Z_3$は$\mu$の単調増加関数であり，$\beta\geqq 0$が従う。またこの表式より

$$\lim_{\mu\to 0}Z_3=Z_3^{\text{on-shell}},\qquad \lim_{\mu\to\infty}Z_3=\int_0^\infty ds\,\rho(s)=1$$

だから，$e(\mu=0)=e$，$e(\mu=\infty)=e^0$がいえる。

演 習 問 題 9.

9.1 $\mathcal{A}$が$\mathrm{tr}[\partial_\mu C\cdot A_\rho]\mathrm{tr}[A^\mu A^\rho]$のように二つのトレースの積の形になる場合や，$X^\mu$が次元1の場合は，$\Delta$のBRS不変性を満たせないことがすぐわかる。また，次元2ではベクトル量X^μを作れない。

したがって，可能なX^μの一般形は

$$\begin{aligned}X^\mu=&\alpha_1\Box A^\mu+\alpha_2\partial^\mu\partial^\nu A_\nu+\beta_1A^\mu\partial^\nu A_\nu+\beta_2\partial^\nu A_\nu A^\mu\\&+\beta_3A^\nu\partial_\nu A^\mu+\beta_4\partial_\nu A^\mu A^\nu+\beta_5A^\nu\partial^\mu A_\nu+\beta_6\partial^\mu A_\nu A_\nu\\&+\gamma_1A^\mu A^\nu A_\nu+\gamma_2A^\nu A_\nu A^\mu+\gamma_3A^\nu A^\mu A_\nu\end{aligned}\qquad\text{(a)}$$

$\mathcal{A}=\mathrm{tr}[\partial_\mu C\cdot X^\mu]$(の積分)のBRS不変性の要請から係数$\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$を決めてゆくが，その際，$\boldsymbol{\delta}_\mathrm{B}X^\mu$の中でゴースト場$C$の微分なしの部分は$[X^\mu,C]$の形にまとまり，$\mathrm{tr}[\partial_\mu(\boldsymbol{\delta}_\mathrm{B}C)\cdot X^\mu]$と相殺するから，$n$回微分$\partial^nC$ ($n\geqq 1$)の項のみ調べればよい。

i） まず，$\boldsymbol{\delta}_\mathrm{B}X^\mu$で$\partial^3C$の項は，(a)の$\alpha$項($\alpha_i$を係数とする項)からしか出ず，それらの$\boldsymbol{\delta}_\mathrm{B}\mathcal{A}$への寄与が消える条件から，$\alpha_1=-\alpha_2$が出る。よって$\alpha$項は$\mathcal{A}$の中で

$$\mathrm{tr}\{\partial_\mu C\cdot\alpha_1[\Box A^\mu-\partial^\mu\partial^\nu A_\nu]\}\qquad\text{(b)}$$

の形をとる。ところが，これから自明なBRS不変量

$$\boldsymbol{\delta}_\mathrm{B}\left\{\frac{\alpha_1}{2}\,\mathrm{tr}[A_\mu(\Box g^{\mu\nu}-\partial^\mu\partial^\nu)A_\nu]\right\}\qquad\text{(c)}$$

を引いてやれば，($\Delta=\int d^4x\,\mathcal{A}$に効かない全微分項を除いて) (b)はちょうど消せて後に$\mathrm{tr}[\partial_\mu C\cdot(A\text{の2次項})]$の形の項が残る。この残った項は(a)の$\beta$項に吸

収できるので，α 項は実質的に自明な BRS 不変量 (c) に書き直せたことになり，以後 $\alpha_i=0$ としてよい。

ii） 次に，$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}X^{\mu}$ で $\partial^2 C$ 項を見る。これは (a) の β 項からのみ出てきて，それらが $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\mathcal{a}$ の中で消える条件から，すぐに

$$\beta_1=\beta_2=0, \qquad \beta_3=-\beta_5, \qquad \beta_4=-\beta_6 \tag{d}$$

が従う。さらに，$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}X^{\mu}$ の $\partial^1 C$ 項で A の 1 次の項を見れば，これも β 項からの寄与のみで，それらが $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\mathcal{a}$ の中で消える条件から $\beta_3=-\beta_4$ が出る。したがって，β 項は $\mathcal{a}$ の中で

$$\mathrm{tr}\{\partial_\mu C\cdot\beta_3[A_\nu,\ (\partial^\nu A^\mu-\partial^\mu A^\nu)]\}$$

の形にまとまる。この形は，上と同様，自明な BRS 不変量

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\{\beta_3 A_\mu A_\nu(\partial^\nu A^\mu-\partial^\mu A^\nu)\}$$

を引けば，ちょうど消すことができ，A の 3 次の項が残るが，それらは (a) の γ 項に吸収できる。

iii） 最後に残った (a) の γ 項に対しては，$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\mathcal{a}$ が全微分になる条件から $\gamma_1=\gamma_2$ が出て，したがって $\mathcal{a}$ は次の形となる

$$\mathrm{tr}\,[\partial^\mu C(\gamma_1\{A_\mu,\ A^\nu A_\nu\}+\gamma_3 A^\nu A_\mu A_\nu)].$$

この形は，また，ちょうど

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\left[\frac{\gamma_1}{2}A^\mu A_\mu A^\nu A_\nu+\frac{\gamma_3}{4}A^\mu A^\nu A_\mu A_\nu\right]$$

と書けるので，結局，$\mathcal{a}$ はすべて自明な BRS 不変量となることが証明された。

9.3 1） 水平性条件を解けば超場 $A_M(x,\theta,\bar\theta)$ の $\theta,\bar\theta$ 依存性が次のように決まる：

$$A_\mu(x,\theta,\bar\theta)=A_\mu(x)+\theta D_\mu C(x)+\bar\theta D_\mu\bar C(x)+\bar\theta\theta(iD_\mu B+\{D_\mu C,\bar C\}),$$
$$A_\theta(x,\theta,\bar\theta)=C(x)+\theta(-C^2(x))+\bar\theta i\bar B(x)+\bar\theta\theta[i\bar B(x),C(x)],$$
$$A_{\bar\theta}(x,\theta,\bar\theta)=\bar C(x)+\theta iB(x)+\bar\theta(-\bar C^2(x))+\bar\theta\theta[-iB(x),\bar C(x)].$$

ただし，$\partial_\theta A_{\bar\theta}|_{\theta=\bar\theta=0}\equiv iB(x)$，$\partial_{\bar\theta}A_\theta|_{\theta=\bar\theta=0}\equiv i\bar B(x)$ と定義し，$F_{\theta\theta}=0$ の条件より

$$iB(x)+i\bar B(x)+\{C(x),\bar C(x)\}=0$$

を満たす。これは 5-5 (63) と同じである。上の $\theta,\bar\theta$ 展開は，すべて

$$X(x,\theta,\bar\theta)=X(x)+\theta(\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}X(x))+\bar\theta(\bar{\boldsymbol{\delta}}_{\mathrm{B}}X(x))+\bar\theta\theta(\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\bar{\boldsymbol{\delta}}_{\mathrm{B}}X(x))$$

の形で，$\partial/\partial\theta$, $\partial/\partial\bar\theta$ が BRS，反 BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}$, $\bar{\boldsymbol{\delta}}_{\mathrm{B}}$ をそれぞれ再現している。

2） 求める水平性条件は $D_M\varphi(z)dz^M=D_\mu\varphi(z)dx^\mu$，すなわち $D_\theta\varphi(z)=D_{\bar\theta}\varphi(z)=0$ である。実際，このとき $\partial_\theta\varphi(z)|_{\theta=\bar\theta=0}=-A_\theta(z)\varphi(z)|_{\theta=\bar\theta=0}=-C(x)\varphi(x)=\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\varphi(x)$ などが従う。

9.5 後半部の，四角グラフ 9·3 図のアノマリーへの寄与は，

$$ik_\mu\Gamma_H^{(4)\mu\nu\rho\sigma}|_{\text{アノマリー}}$$
$$=\int\frac{d^n l}{i(2\pi)^l}\frac{\mathrm{tr}\,[\not{l}\,i\gamma^\nu\mathcal{P}_H(\not{l}+\not{P}_1)i\gamma^\rho\mathcal{P}_H(\not{l}+\not{P}_2)i\gamma^\sigma\mathcal{P}_H(\not{l}+\not{P}_3)(-\epsilon_H\not{k}\gamma_5)]}{l^2(l+P_1)^2(l+P_2)^2(l+P_3)^2}$$

$(P_n\equiv\sum_{i=1}^n p_i)$ を評価すればよい。$(n-4)^{-1}$ の pole を出すためには，$\not{l}$，$(\not{l}+\not{P}_1)$，$(\not{l}+\not{P}_2)$，$(\not{l}+\not{P}_3)$ の因子から $\not{\hat{l}}$ を三つ，または $\not{\hat{l}}$ を一つ $\underline{\not{l}}$ を二つ，出す必要があるが，$\gamma^\alpha\mathcal{P}_H$ にはさまれた $(\not{l}+\not{P}_1)$，$(\not{l}+\not{P}_2)$ からは $\not{\hat{l}}$ を出すと 0 にな

ること，および $\not{l}$ と $(\not{l}+\not{P}_3)$ から $\underline{\not{l}}$ と $\not{r}$ を一つずつ出す寄与が 9-2 (30) で説明した理由で相殺すること，に注意して，結局，分子の tr 項は

$$i\epsilon_H \operatorname{tr}[\not{r}\gamma^\nu \mathcal{P}_H \underline{\not{l}}\gamma^\rho \underline{\not{l}}\gamma^\sigma \not{P}_3 \not{r}\gamma_5] = \frac{i}{2}\epsilon_H \operatorname{tr}[\gamma_5\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\rho\gamma^\beta\gamma^\sigma\not{P}_3] r^2 \underline{l}_\alpha \underline{l}_\beta$$

のみが効く。(ただし，真のアノマリーの $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 比例項を与えないものは落とした。) さらに $(n-4)^{-1}$ の pole 項には $\underline{l}_\alpha \underline{l}_\beta \to (1/4)g^{(4)}_{\alpha\beta}\underline{l}^2$ の置き換えをしてよいから，

$$\frac{i}{2}\epsilon_H \operatorname{tr}[\gamma_5\gamma^\nu(\gamma^\alpha\gamma^\rho\gamma^\beta)\gamma^\sigma\not{P}_3]\,\frac{1}{4}g^{(4)}_{\alpha\beta} r^2 \underline{l}^2 = \epsilon_H \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(p_1+p_2+p_3)_\mu r^2 \underline{l}^2$$

となり，また，発散は分母の P_i にはよらないから $P_i=0$ として，結局

$$ik_\mu \Gamma^{(4)\mu\nu\rho\sigma}_H|_{アノマリー} = \epsilon_H \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(p_1+p_2+p_3)_\mu \int \frac{d^n l}{i(2\pi)^n}\,\frac{r^2 \underline{l}^2}{(l^2)^4}$$

を評価すればよい。この積分部分は，公式 (C.11) を用いて

$$\frac{1}{(4\pi)^2\Gamma(4)}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}(n-4)\cdot 4 \underset{n\to 4}{\longrightarrow} -\frac{1}{48\pi^2}$$

を与えるから，9-2 (28) と一致していることがわかる。

9.6 1) $\gamma_\mu\gamma_5$，$i\gamma_\nu$，$i\gamma_\rho$ を頂点とする場合の 9·1 図の三角グラフに対しては

$$k_\mu \Gamma^{(3)\mu\nu\rho}_5|_{アノマリー} = \int \frac{d^n l}{i(2\pi)^n}\,\frac{\operatorname{tr}[(\not{l}+\not{q})(+2\not{r}\gamma_5)(\not{l}-\not{p})i\gamma^\nu \not{l} i\gamma^\rho]}{(-)(l+q)^2(l-p)^2 l^2}$$

ただし $k_\mu\gamma^\mu\gamma_5 = -(\not{l}+\not{q})\gamma_5 - \gamma_5(\not{l}-\not{p}) + 2\not{r}\gamma_5$ のアノマラス部分が $(+2\not{r}\gamma_5)$ であることを使った。分子の tr を 9-2 (23) と同様に評価すれば $-8i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\mu q_\sigma r^2$ となるから，9-2 (24) の積分 I_1 の公式 9-2 (26) を用いるとただちに

$$ik_\mu \Gamma^{(3)\mu\nu\rho}_5|_{アノマリー} = \frac{1}{4\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\mu q_\sigma$$

が得られる。したがって，$\partial^\mu\langle j^5_\mu\rangle$ のゲージ場 2 次項の係数が決まるから

$$\partial^\mu\langle j^5_\mu\rangle = \frac{1}{4\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\operatorname{tr}\left[\partial_\mu\left(V_\nu\partial_\rho V_\sigma + \frac{2}{3}V_\nu V_\rho V_\sigma\right)\right] = \frac{1}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\operatorname{tr}[F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}]$$

を得る。

2) Pauli-Villars 正則化法では，フェルミオン質量が Λ のループの寄与を引くから

$$\Gamma^{(3)\mu\nu\rho}_{5,\,\mathrm{reg.}} = -\int_0^\Lambda dm \int \frac{d^4 l}{i(2\pi)^4}\,\frac{\partial}{\partial m}\operatorname{tr}\left[\frac{1}{m-\not{l}-\not{q}}\gamma^\mu\gamma_5\frac{1}{m-\not{l}+\not{p}}i\gamma^\nu\frac{1}{m-\not{l}}i\gamma^\rho\right]$$

と書ける。$k_\mu\Gamma^{(3)\mu\nu\rho}_{5,\,\mathrm{reg.}}$ に対して，“WT 恒等式”

$$k_\mu\gamma^\mu\gamma_5 = (m-\not{l}-\not{q})\gamma_5 + \gamma_5(m-\not{l}+\not{p}) - 2m\gamma_5$$

を適用すれば，被積分関数は 3 項に分離して

$$\frac{\partial}{\partial m}\operatorname{tr}\left[\gamma_5\frac{1}{m-\not{l}+\not{p}}i\gamma^\nu\frac{1}{m-\not{l}}i\gamma^\rho + \frac{1}{m-\not{l}-\not{q}}\gamma_5 i\gamma^\nu\frac{1}{m-\not{l}}i\gamma^\rho \right.$$
$$\left. + \frac{1}{m-\not{l}-\not{q}}(-2m\gamma_5)\frac{1}{m-\not{l}+\not{p}}i\gamma^\nu\frac{1}{m-\not{l}}i\gamma^\rho\right]$$

となる。この正則化により，これら 3 項の積分は**それぞれ**が収束していることに注意する。なぜなら，$\partial/\partial m$ の存在を考慮して被積分関数は l の -3 次で，1 次発

散するように見えるが，ゲージ不変性（または $\mathrm{tr}[\gamma_5\cdots]$ の構造）のために積分は必ず $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\mu q_\sigma$ に比例するので実質的次数は 2 下がり，収束するのである。よって積分の変数変換が許され，第 1 項で l を $l+p$ に変換すれば，外線の添字・運動量の交換 $(\nu,p)\leftrightarrow(\rho,q)$ を行った第 2 項と相殺することがわかる（9-2 (18) 式上の議論参照）。それゆえ，第 3 項のみ残し，$\Lambda\to\infty$ で評価すれば

$$
\begin{aligned}
k_\mu\Gamma^{(3)\mu\nu\rho}_{5,\,\mathrm{reg.}} &= \lim_{\Lambda\to\infty}\left[\int\frac{d^4l}{i(2\pi)^4}\frac{2m\,\mathrm{tr}[\gamma_5(m+\not{l}-\not{p})\gamma^\nu(m+\not{l})\gamma^\rho(m+\not{l}+\not{q})]}{(m^2-(l-p)^2)(m^2-l^2)(m^2-(l+q)^2)}\right]^{m=0}_{m=\Lambda}\\
&= \lim_{\Lambda\to\infty}\left[-8i\Lambda^2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\mu q_\sigma\int\frac{d^4l}{i(2\pi)^4}\frac{1}{(\Lambda^2-l^2)^3}\right]\\
&= \lim_{\Lambda\to\infty}\left[-8i\Lambda^2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\mu q_\sigma\cdot(32\pi^2\Lambda^2)^{-1}\right]\\
&= \frac{-i}{4\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\mu q_\sigma
\end{aligned}
$$

が得られ，上の次元正則化による結果と一致している。

9.7 Euclid 空間の Gauss 積分公式

$$
\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}[1,\ k^\mu k^\nu,\ k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma]e^{-k^\tau k^\tau/M^2}=\frac{M^4}{16\pi^2}\left[1,\ \frac{M^2}{2}\delta^{\mu\nu},\ \frac{M^4}{4}(\delta^{\mu\nu}\delta^{\rho\sigma}+\text{対称化 2 項})\right]
$$

を用いまず積分を行い，さらに $\sigma^{\mu\nu}=[\gamma^\mu,\gamma^\nu]/4$ に対して

$$
\begin{aligned}
&[\sigma^{\mu\nu},\sigma^{\rho\sigma}]=g^{\nu\rho}\sigma^{\mu\sigma}-g^{\mu\rho}\sigma^{\nu\sigma}+g^{\mu\sigma}\sigma^{\nu\rho}-g^{\nu\sigma}\sigma^{\mu\rho},\\
&g_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\mu}\sigma^{\beta\nu}=-\sigma^{\mu\nu},\\
&\mathrm{tr}(\gamma_5\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\sigma})=\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma)=-\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\quad(\text{負号に注意})
\end{aligned}
$$

などの公式を用いてすべての項を $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ に比例するように書き換える。（ただし，これらは $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}=-2\delta^{\mu\nu}$ の Euclid 空間の公式であることに注意。） この段階で 9-2 (72) の $(\sigma\cdot ikA)^4$ 項からの寄与は，$(g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}+$ 対称化 2 項$)\times\mathrm{tr}(\gamma_5\sigma^{\alpha\mu}\sigma^{\beta\nu}\sigma^{\gamma\rho}\sigma^{\delta\sigma})=0$ のため 0 となって落ちることがわかる。また最後の項 $(\sigma\cdot ikA)^2(ik\cdot\tilde{D})^2|_{6\text{項}}$ $(\tilde{D}\equiv 2\partial+A)$ もすべて落ちる。例えば

$$
ik\cdot\tilde{D}\,(\sigma\cdot ikA)\,ik\cdot\tilde{D}\,(\sigma\cdot ikA)\ \underset{k\ \text{積分}}{\longrightarrow}\ \mathrm{tr}(\gamma_5\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\sigma})\cdot\tilde{D}^\alpha A_\nu\,\tilde{D}^\beta A_\sigma(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}+g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu})=0.
$$

さらに，$(\sigma\cdot ikA)^3(ik\cdot\tilde{D})|_{4\text{項}}$ も，$(\sigma\cdot ikA)^3=-(\sigma\cdot Aik)^3$ であるから，明らかに $\sigma\cdot ikA\to\sigma\cdot Aik$ の交換をした項（$e^{-\not{D}\not{\partial}/\Lambda^2}$ を含む方の寄与）と相殺するから評価しなくてよい。結局 (72) の前から 3 項のみが残り，それを順に I，II，III と呼ぶ。それらの寄与は，

$$
\int d^4x\left(\frac{-1}{32\pi^2}\right)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}[CX_{\mu\nu\rho\sigma}]=\left(\frac{-1}{32\pi^2}\right)\int\mathrm{tr}[CX]
$$

の形に書け，4-form X への，I，II，III 項それぞれの寄与は

$$
\begin{aligned}
&X_{\mathrm{I}}=2dAdA,\qquad X_{\mathrm{II}}=\frac{2}{3}(A^2dA-AdAA+dAA^2),\\
&X_{\mathrm{III}}=-\frac{1}{3}[\tilde{D}AdA-A\tilde{D}dA-AdA\tilde{D}+\tilde{D}dAA+dA\tilde{D}A-dAA\tilde{D}]\\
&\qquad=-\frac{4}{3}dAdA,
\end{aligned}
$$

と計算される。ただし，d や $\tilde{D}=2d+A$ の微分 d は，その後ろにある A すべてにかかるものである。同様に $\sigma\cdot ikA \to \sigma\cdot Aik$，$\sigma\cdot\partial A \to \sigma\cdot A\partial$ の置き換えをした項からの寄与は，それぞれ

$$X'_{\mathrm{I}}=0,\qquad X'_{\mathrm{II}}=\frac{2}{3}(A^2Ad-AAdA+AdA^2),$$

$$X'_{\mathrm{III}}=-\frac{1}{3}[A\tilde{D}Ad-\tilde{D}AAd+AAd\tilde{D}+AdA\tilde{D}-Ad\tilde{D}A-\tilde{D}AdA]$$

$$=\frac{2}{3}dAdA.$$

$X_{\mathrm{I}}\sim X'_{\mathrm{III}}$ を皆加えれば，**9-2** (73) の結果に一致している。

9.8 **9-3** (32) の $-Z$(負号に注意) への，それぞれの項の寄与は，

$$\alpha_4(V,A_R)\longrightarrow \mathrm{tr}\left[V(A_{\mathrm{R}}dA_{\mathrm{R}}+dA_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{R}}+A_{\mathrm{R}}^3)-\frac{1}{2}VA_{\mathrm{R}}VA_{\mathrm{R}}-V^3A_{\mathrm{R}}\right]$$
$$(V\equiv dg\cdot g^{-1})$$

$$-\alpha_4(-v,A_{\mathrm{L}})\longrightarrow \mathrm{tr}\left[v(A_{\mathrm{L}}dA_{\mathrm{L}}+dA_{\mathrm{L}}A_{\mathrm{L}}+A_{\mathrm{L}}^3)+\frac{1}{2}vA_{\mathrm{L}}vA_{\mathrm{L}}-v^3A_{\mathrm{L}}\right]$$
$$(v\equiv g^{-1}dg=-dg^{-1}\cdot g)$$

$$-\mathcal{Y}(A_{\mathrm{R}}^{g^{-1}},A_{\mathrm{L}}^{g})\longrightarrow \mathrm{tr}\Big[(F_{\mathrm{R}}^{g^{-1}}+F_{\mathrm{L}}^{g})(A_{\mathrm{R}}^{g^{-1}}A_{\mathrm{L}}^{g}-A_{\mathrm{L}}^{g}A_{\mathrm{R}}^{g^{-1}})-\{(A_{\mathrm{R}}^{g^{-1}})^3A_{\mathrm{L}}^{g}-(A_{\mathrm{L}}^{g})^3A_{\mathrm{R}}^{g^{-1}}\}$$
$$+\frac{1}{2}A_{\mathrm{R}}^{g^{-1}}A_{\mathrm{L}}^{g}A_{\mathrm{R}}^{g^{-1}}A_{\mathrm{L}}^{g}\Big]$$

$$(31)\text{ の表面項}\longrightarrow -\mathrm{tr}\left[vV^3+v^3V+\frac{1}{2}vVvV\right]$$

である。ただし，$gvg^{-1}=V$ を用いた。これに

$$A_{\mathrm{R}}^{g^{-1}}=g^{-1}A_{\mathrm{R}}g+v,\qquad A_{\mathrm{L}}^{g}=gA_{\mathrm{L}}g^{-1}-V,\qquad F_{\mathrm{R}}^{g^{-1}}=g^{-1}F_{\mathrm{R}}g,\qquad F_{\mathrm{L}}^{g}=gF_{\mathrm{L}}g^{-1},$$

を代入し，恒等式 $dV=V^2$，$dv=-v^2$，$gvg=VU$，$g^{-1}vg^{-1}=U^{-1}v$，$gVg=Uv$，$g^{-1}Vg^{-1}=vU^{-1}$，$VU+Uv=dU$ などを使って，ただひたすら計算する。ただし，**9-3** (32) 下の脚注に示した全微分項を捨てたことに注意せよ。

9.9 問題の指示通りにやれば，相互作用項 $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ は，ちょうど **9-3** (36) に与えた A_μ, W_μ, $W_\mu^\dagger$, Z_μ の線形結合 (3×3) 行列 A_{L}, A_{R} を用いた

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}}=(\bar{u},\bar{d},\bar{s})_{\mathrm{L}}i\gamma_\mu A_{\mathrm{L}}^\mu\begin{pmatrix}u\\d\\s\end{pmatrix}_{\mathrm{L}}+(\bar{u},\bar{d},\bar{s})_{\mathrm{R}}i\gamma_\mu A_{\mathrm{R}}^\mu\begin{pmatrix}u\\d\\s\end{pmatrix}_{\mathrm{R}}$$

の形に書けることがわかる。すなわち，ゲージ場 A_μ, W_μ, $W_\mu^\dagger$, Z_μ は，カイラル・フレーバー $SU(3)_{\mathrm{L}}\times SU(3)_{\mathrm{R}}$ 群の中に，**9-3** (36) の形で埋めこまれた ($SU(2)_{\mathrm{W}}\times U(1)_{\mathrm{Y}}$ 群の) 変換性を示すということで，したがって，有効作用にもその形で現れるのである。

9.10 相互作用 Lagrangian $\mathcal{L}_{\pi^0\to2\gamma}$ の表式 **9-3** (38) より，$\pi^0\to2\gamma$ 崩壊の不変振幅は

$$\mathfrak{M}=-G\cdot2\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}ip_{1\mu}\varepsilon_\nu^{(\sigma)*}(\boldsymbol{p}_1)ip_{2\rho}\varepsilon_\lambda^{(\tau)*}(\boldsymbol{p}_2)\qquad(G\equiv Ne^2/24\pi^2f_\pi).$$

崩壊幅 $\Gamma(\pi^0\to2\gamma)$ は，公式 **4-6** (42) より，終状態光子のスピン和をとって

$$\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma)=\frac{1}{2!}\cdot\frac{|\boldsymbol{p}|}{8\pi m_\pi^2}\int\frac{d\Omega}{4\pi}\sum_{\sigma,\tau=\pm}|\mathfrak{M}|^2$$

前の 1/2! の因子は，終状態 2 光子が同種粒子だからである。ここで $\sum_{\sigma=\pm}\varepsilon_\mu^{(\sigma)}\varepsilon_\nu^{(\sigma)*}$ なる和が現れるが，それに対して **5-6** (44) の完全性

$$\left(\sum_{\sigma=\pm}\varepsilon_\mu^{(\sigma)}(\boldsymbol{p})\varepsilon_\nu^{(\sigma)*}(\boldsymbol{p})\right)+\varepsilon_\mu^{(L)}(\boldsymbol{p})\varepsilon_\nu^{(S)*}(\boldsymbol{p})+\varepsilon_\mu^{(S)}(\boldsymbol{p})\varepsilon_\nu^{(L)*}(\boldsymbol{p})=-g_{\mu\nu}$$

を用いる。余分に加えた 2 項は，$\varepsilon_\mu^{(L)}(\boldsymbol{p})\propto p_\mu$ を含み，上の $\mathfrak{M}$ には効かないので足しておいてかまわない。そうすれば，

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma,\tau=\pm}|\mathfrak{M}|^2&=4G^2\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}p_{1\alpha}p_{2\gamma}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}p_{1\mu}p_{2\rho}(-g_{\beta\nu})(-g_{\delta\lambda})\\&=4G^2(-2\delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu})p_1^\alpha p_2^\beta p_{1\mu}p_{2\nu}\\&=8G^2((p_1\cdot p_2)^2-p_1^2p_2^2).\end{aligned}$$

ここで公式 (B.19) を用いた。**4-6** (39) より，今の場合，$m_1=m_2=0$，$p_{10}+p_{20}=\sqrt{s}=m_\pi$ だから

$$(p_1\cdot p_2)^2-p_1^2p_2^2=m_\pi^4/4,\qquad |\boldsymbol{p}|=m_\pi/2.$$

よって，カラー数 $N=3$ のとき $G=e^2/8\pi^2 f_\pi=\alpha/2\pi f_\pi$ となることを使って

$$\Gamma(\pi^0\to 2\gamma)=\frac{\alpha^2}{64\pi^3}\frac{m_\pi^3}{f_\pi^2}$$

を得る。

9.11 もしアノマリー $\int\omega_{2n}^1$ が自明なら，$\int\omega_{2n}^1=\int\delta X$ なる X が存在する。そうすると $\omega_{2n}^1=\delta X+d(*)$ の形に書け，$d\omega_{2n}^1=-\delta(dX)$ がしたがう。ここで降下方程式 (76) の第 1 式を用いれば，$\delta(dX-\omega_{2n+1}^0)=0$. よって $\omega_{2n+1}^0=dX+\delta Z$ となる Z が存在し，$d\omega_{2n+1}^0=\delta(-dZ)$ と書ける。ところがこれは $d\omega_{2n+1}^0=\mathrm{tr}\,F^{n+1}$ が $\delta(*)$ の形に書けないことに矛盾する。

索　　引

イタリック数字はI巻の頁を示す

E

F

G

H

九後(くご) 汰一郎(たいちろう) 略歴

1949年　京都市に生まれる
1971年　京都大学理学部物理学科卒業
1976年　京都大学理学博士
1977～78年　Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik (München) 研究員
1978年　京都大学理学部助手
1981年　京都大学理学部助教授

主要著書

"Local Covariant Operater Formalism of Non-Abelian Gauge Theories and Quark Confinement Problem", Prog. Theor. Phys. Supplement No. 66 (1979)　(共著，理論物理学刊行会)

"Nonlinear Realization and Hidden Local Symmetries", Physics Reports **164** (1988)
(共著，North-Holland Publishing Company)

1989年 7 月20日　初 版 発 行
1992年 4 月20日　初版第 4 刷発行

新物理学シリーズ 24
ゲージ場の量子論 II

著　者　九後汰一郎
発行者　山 本　格

発行所　株式会社　培 風 館
東京都千代田区九段南 4-3-12・郵便番号 102
電話(03)3262-5256(代表)・振替 東京4-44725

寿 印刷・三水舎製本

PRINTED IN JAPAN

ISBN4-563-02424-4 C3342